بسم الله الرحمن الرحیم

در ادامه بحث انتگرال

در دو مثال قبلی توان فرد و زوج sin و Cos را تجربه کردیم و از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده کردیم

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

△ حالت دیگر $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$ درحالی که حداقل یکی از توانها فرد باشد.

حل این حالت شبیه حالتی است که توان فرد داشتیم.

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \, (\sin x \, dx)$$

$$= \int (1-\cos^2 x) \cos^4 x \, (\sin x \, dx)$$

$$= \int \cos^4 x \sin x \, dx - \int \cos^6 x \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + c$$

$$\int \underbrace{\sin^4 x \cos^4 x}\, dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 2x\, dx$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$و \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow \sin^2 2x \quad \frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{64}\int dx}_{\frac{x}{64}} \underbrace{- \frac{1}{32}\int \cos 4x\, dx}_{-\frac{\sin 4x}{128}} + \underbrace{\frac{1}{64}\int \cos^2 4x\, dx}_{\frac{1}{64}\int \frac{1+\cos 8x}{2}\, dx}$$

$$= \frac{x}{64} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C$$

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\sin(a-b) + \frac{1}{2}\sin(a+b)$$

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 5x \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin x \, dx + \frac{1}{2}\int \sin 5x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C$$

مثال ۹ سنگی به طور قائم از زمین با سرعت اولیه $128\ \frac{ft}{sec}$ به هوا پرتاب شده است.
اگر تنها نیروی جاذبه مد نظر باشد سنگ چقدر بالا می رود و مقدار سرعت آن در برخورد با زمین چقدر است؟
همچنین چقدر طول می کشد تا سنگ به زمین بخورد؟

$t \leftarrow$ زمان از لحظه پرتاب به ثانیه

$s \leftarrow$ فاصله سنگ تا زمین به فوت

$v \leftarrow$ سرعت سنگ در t ثانیه به ft/s

$g \leftarrow$ مقدار شتاب جاذبه $\rightarrow$ $g = 32\ \frac{ft}{sec^2}$

$$\frac{dv}{dt} = -32$$

جهت رو به بالا مثبت و رو به پایین منفی

$$dv = -32\,dt$$

$$\int dv = \int -32\,dt \rightsquigarrow v = -32t + C_1$$

$$(t = 0 \ , \ v = 128) \rightsquigarrow 128 = (-32 \times 0) + C_1$$

$$C = 128$$

$$\Rightarrow \quad v = -32t + 128$$

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 128$$

$$ds = (-32t + 128)\,dt$$

$$\int ds = \int (-32t + 128)\,dt$$

$$S = -16t^2 + 128t + C_2$$

$$(t = 0 \rightarrow S = 0) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$S = -16t^2 + 128t$$

$$0 = -16t^2 + 128t \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases}$$

پس 8 ثانیه طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد و $t=0$ متعلق به لحظه پرتاب است.

$t = 8 \longrightarrow v = -32t + 128$

$$v = (-32)(8) + 128$$

$$v = -128$$

سنگ با سرعت ١٢٨ ft/sec به زمین می‌خورد.

$$v = -32t + 128$$

$$0 = -32t + 128$$

(زمان اوج بودن $t = 4$ sec پس $S = -16t^2 + 128t$

ارتفاع اوج است ($S = 256$ ft)

انتگرال معین ۵

مجموع جملات را با نماد سیگما نشان می‌دهیم

کران بالا

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$$

کران پایین

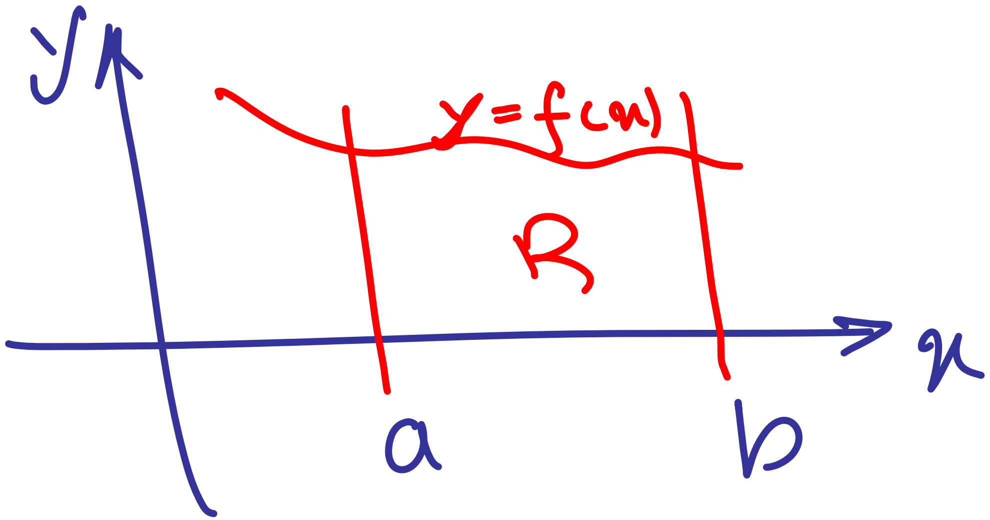
$$\sum_{i=3}^{6} f(x_i)\,\Delta x = f(x_3)\Delta x+f(x_4)\Delta x+f(x_5)\Delta x+f(x_6)\Delta x$$

تعریف

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{c}_{\text{ثابت}} = cn\right) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} c\cdot F(i) = c\sum_{i=1}^{n} F(i)\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} [F(i)+G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i)+\sum_{i=1}^{n} G(i)\right)$$

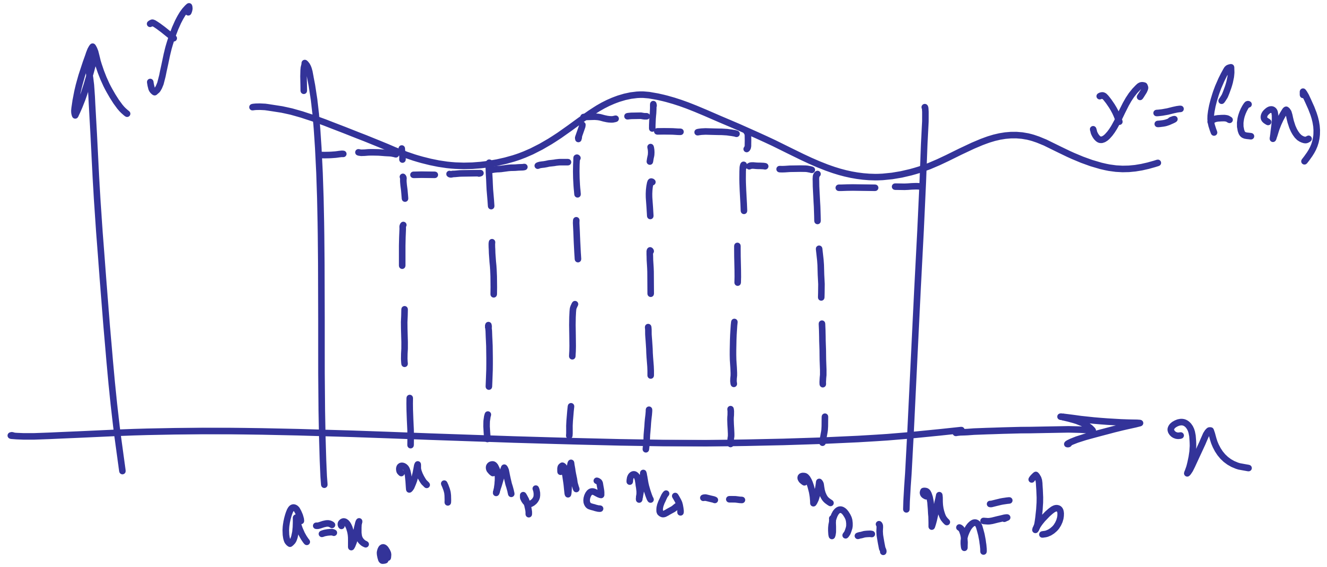
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left[F(i)-F(i-1)\right] = F(n)-F(0)\right)$$



f تابع پیوسته‌ای بر بازه $[a,b]$ است

بازه بسته $[a,b]$ را به n زیربازه تقسیم می‌کنیم که هر کدام مساوی Δx باشد

$$\Delta x = (b-a)/n$$



مجموع مساحت این n مستطیل $\left(S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right)$

وقتی n افزایش بیابد یعنی مستطیلها کوچک‌تر شوند بهتر مساحت را پوشش می‌دهیم

در واقع وقتی n بیرون کرانه افزایش می‌یابد S_n به حدی نزدیک می‌شود، این حد

می‌تواند مساحت ناحیه زیر نمودار باشد.

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

در هر زیر بازه Δx نقطه‌ای اختیار می‌کنیم مثلاً ξ_1 نقطه انتخاب در بازه $[x_0 , x_1]$

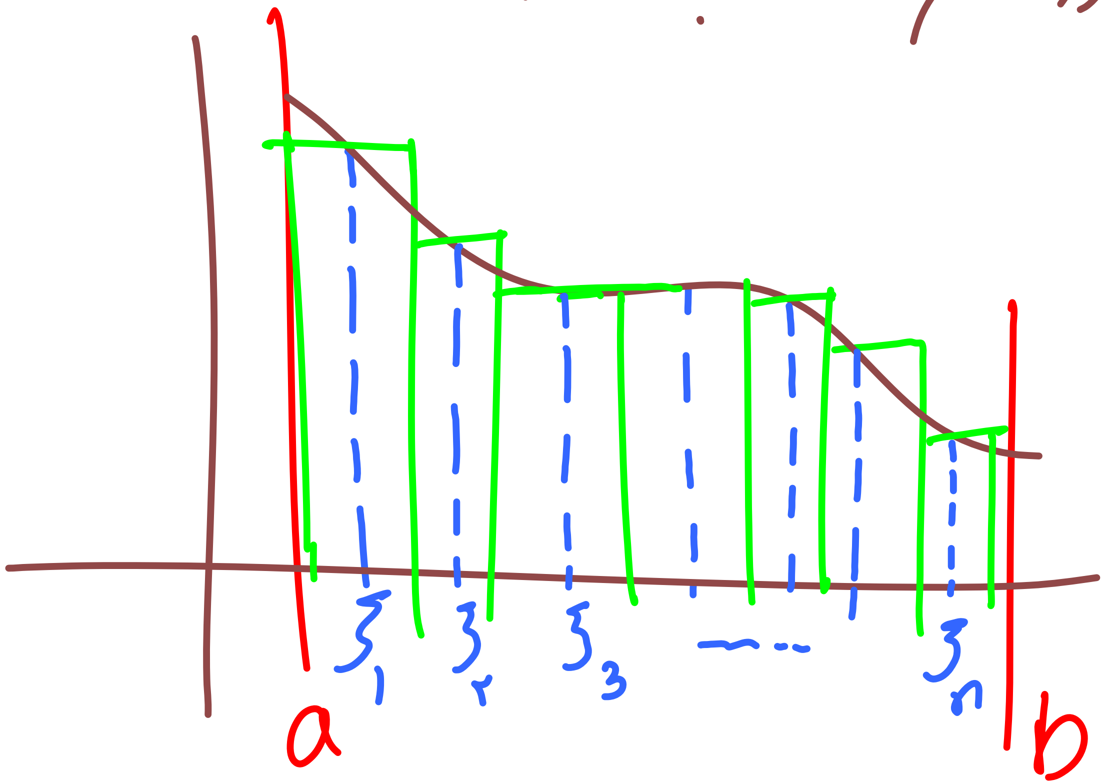
باشد یعنی $x_0 < \xi_1 < x_1$ و ξ_2 نقطه‌ای در بازه $[x_1 , x_2]$ و ... ξ_i نقطه‌ای

در بازه $[x_{i-1} , x_i]$ حال مجموع زیر را درنظر بگیرید

$$f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + \cdots + f(\xi_n)\Delta_n x$$

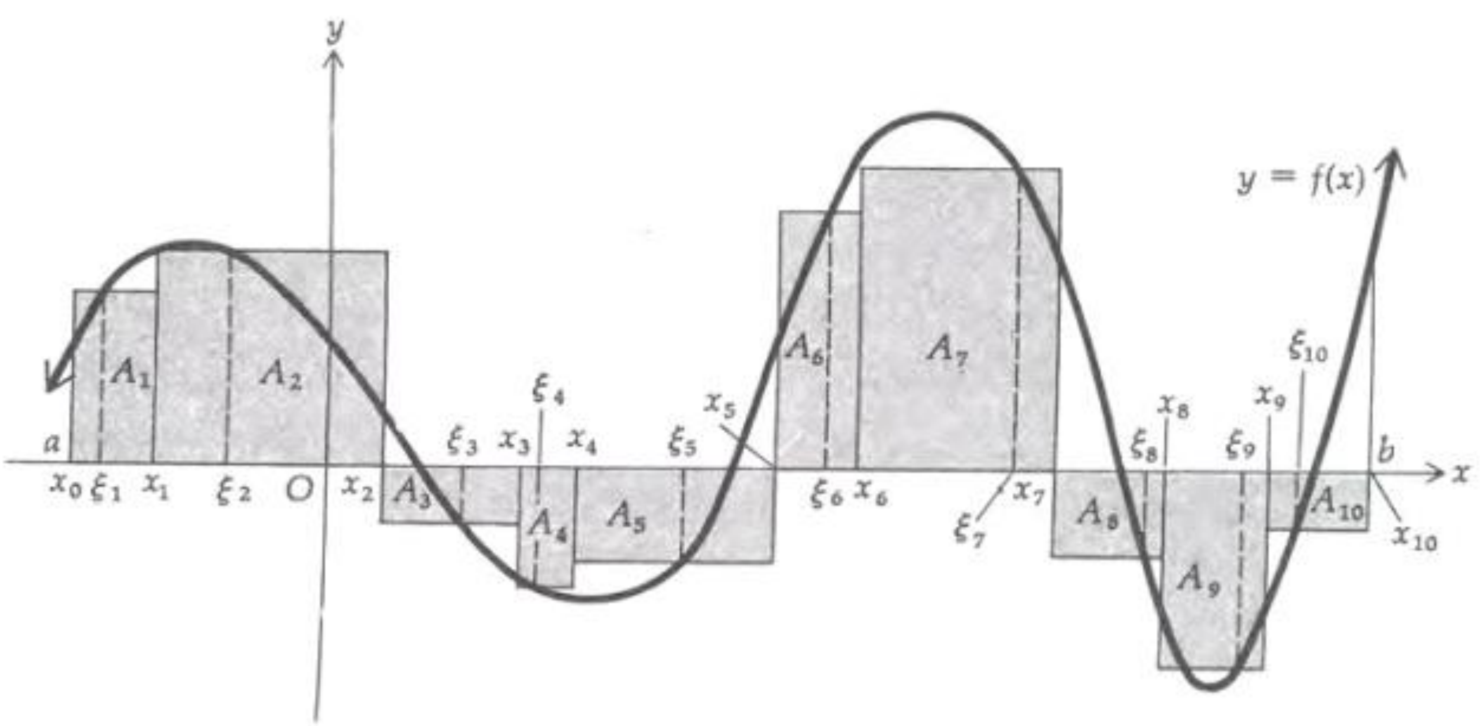
چنین مجموعی را یک "مجموع ریمان" می‌نامند

فرض کنید Δx ها لزوماً هم فاصله نباشند



$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

و اگر تابع $f(x)$ به مقادیر نامنفی محدود شده باشد



دراین صورت برخی از $f(\xi_i)$ ها منفی است در این حالت تعبیر هندسی مجموع ریمان
مجموع مساحات مستطیلهای واقع در بالای محور x و قرینه مساحات مستطیلهای واقع در پایین محور x
است

$$\sum_{i=1}^{10} f(\xi_i)\Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 \cdots - A_{10}$$

تعریف

هرگاه تابع f در بازه بسته $[a,b]$ تعریف شده انتگرال معین f از a تا b که با $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان داده می‌شود با حد زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

حد بالا (b)

حد پایین (a)

بزرگترین زیربازه در بین Δx را با $\|\Delta\|$ نشان می‌دهند

چون انتگرال در واقع حد مجموع است علامت $\int$ در واقع یک S بزرگ است

قبلاً گفتیم علامت $\int$ را پاد مشتق‌گیری می‌نامیم

در واقع یک انتگرال معین را می‌توان با یافتن یک پاد مشتق (انتگرال نامعین)

محاسبه کرد.

تعریف:

$$g'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(x)\Big]_a^b$$

$$= g(b) - g(a)$$

مثال :

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_1^3$$

$$= 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$$

مثال :

$$\int_0^2 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{2}{3}\, 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

$$\begin{cases} x^3+1 = u \\ 3x^2\,dx = du \end{cases}$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^2 u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big]_0^2$$

$$= \frac{4}{9}(8+1)^{3/2} - \frac{4}{9}(0+1)^{3/2}$$

$$= \frac{4}{9}(27-1) = \frac{104}{9}$$

مثال :

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$$

$$= \int_0^3 (u^2-1)\,u\;2u\,du$$

$u = \sqrt{1+x}$

$u^2 = 1+x$

$x = u^2+1$

$dx = 2u\,du$

$$= 2\int_0^3 (u^4 - u^2)\, du = \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 \Big]_0^3$$

(با توجه به $u=(1+x)^{1/2}$) $\Longrightarrow \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big]_0^3$

$$= \frac{2}{5}4^{5/2} - \frac{2}{3}4^{3/2} - \frac{2}{5}1^{5/2} + \frac{2}{3}1^{3/2}$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{116}{15}$$

البته می‌توانستیم بجای جاگذاری $u=(1+x)^{1/2}$ حدود انتگرال را عوض کنیم.

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx = 2\int_1^2 (u^4 - u^2)\,du$$

$$= \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 \Big|_1^2$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{116}{15}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,(\cos x\,dx)$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)(\cos x \, dx)$$

$$\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 0 \to u = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \to u = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = \int_0^1 (1 - u^2) \, du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} \Big]_0^1 = 1 - 1/3 = 2/3$$

والسلام عليكم ورحمة الله