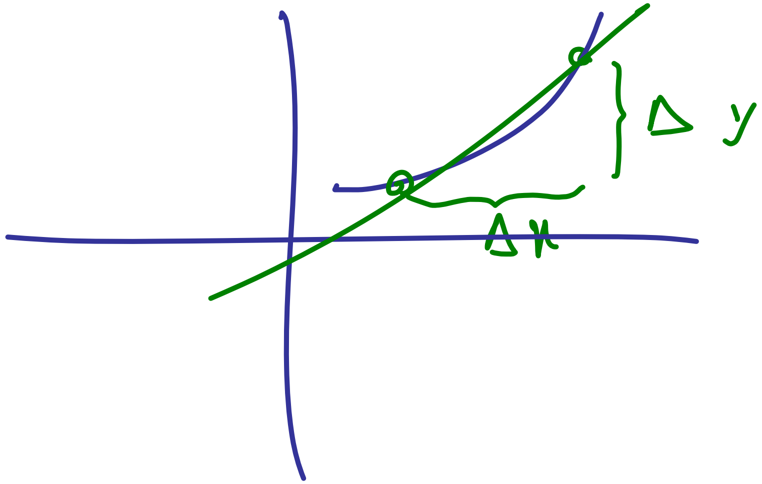
انتگرال ۵

تعریف $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



یا

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$$

اگر تابع f با $y=f(x)$ تعریف شود دیفرانسیل y که با dy نشان داده می‌شود عبارت است از

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

و دیفرانسیل x که با dx نشان داده می‌شود عبارت است از: $dx = \Delta x$

پس به تعبیر دیگر

$$dy = f'(x)\,dx$$

اگر $(dx \neq 0)$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

تعریف: اگر F پاد مشتق f باشد آنگاه $F'(x) = f(x)$ و به عبارت

$$d\left(F(x)\right) = f(x)\,dx$$

عمل معکوس یافتن دیفرانسیل یک تابع، یافتن کلی‌ترین تابعی است که دیفرانسیل داده شده را دارد

این عمل معکوس یا پاد مشتق‌گیری نام دارد و با $\int$ نشان داده می‌شود

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

پس اعمال تعریف شده با علامت d و $\int$ معکوس یکدیگرند

اگر $F(x)+c$ کلی‌ترین تابعی است که دیفرانسیل آن $f(x)dx$ و مشتقش $f(x)$ است

تعریف :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

مثال :

$$\int (3x+5)\, dx$$

$$= 3\int x\, dx + 5\int dx$$

$$= 3\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)+5(x+c_2)$$

$$= \frac{3}{2}x^2+5x+\underbrace{(3c_1+5c_2)}_{c}$$

$$= \frac{3}{2}x^2+5x+c$$

جواب را می‌توان با یافتن مشتق امتحان کرد:

$$D_x\left(\frac{3}{2}x^2+5x+c\right)=3x+5$$

$\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$:مثال

$$= \int x^{2/3}\, dx = \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + C$$

$$= \frac{3}{5} x^{5/3} + C$$

:مثال

$$\int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) dx = \int \left(x^{-4} + x^{-1/4}\right) dx$$

$$= \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{x^{-1/4+1}}{-1/4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{3/4}}{3/4} + C = -\frac{1}{3x^3} + \frac{4}{3} x^{3/4} + C$$

مثال ۹ ۵

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\begin{rcases} u = 1+x^2 \\ du = 2x\,dx \end{rcases} \Rightarrow \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$$

این شبیه قاعده زنجیره‌ای برای یاد مشتق گیری است

حل

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx = \int u^{1/2}\cdot\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du$$

$$\begin{cases} u = 3x+4 \\ du = 3\,dx \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{9}\,u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C$$

مثال 8

$$\int t\,(5+3t^2)^8\,dt$$

$$u = 5+3t^2 \quad \text{و} \quad du = 6t\,dt$$

$$\int u^8\left(\frac{du}{6}\right) = \frac{1}{6}\int u^8\,du = \frac{1}{6}\,\frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{1}{54}\,(5+3t^2)^9 + C$$

مثال :

$$\int x^2 \sqrt[5]{7-4x^3}\,dx$$

$$u = 7-4x^3$$

$$du = -12x^2\,dx \rightsquigarrow x^2\,dx = -\frac{du}{12}$$

$$= \int u^{1/5}\left(-\frac{1}{12}\,du\right) = -\frac{1}{12}\int u^{1/5}\,du = -\frac{1}{12}\,\frac{u^{6/5}}{6/5} + C$$

$$= -\frac{5}{72}\left(7-4x^3\right)^{6/5} + C$$

مثال: انتگرال $\int \frac{4x^2\,dx}{(1-8x^3)^4}$ را حساب کنید.

$$1-8x^3 = u$$

$$-24x^2\,dx = du$$

$$4x^2\,dx = -\frac{1}{6}\,du$$

$$-\frac{1}{6}\int u^{-4}\,du = -\frac{1}{6}\,\frac{u^{-3}}{-3} = \frac{1}{18}u^{-3} + C$$

$$= \frac{1}{18(1-8x^3)^3} + C$$

مثال :

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$$

$$u = 1+x \longrightarrow x = u-1$$

$$du = dx$$

$$= \int (u-1)^2\, u^{1/2}\, du$$

$$= \int (u^2-2u+1)\, u^{1/2}\, du$$

$$= \int u^{5/2}\,du - 2\int u^{3/2}\,du + \int u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{u^{7/2}}{7/2} - 2\,\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \frac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$$

تعريف :

$$\int \sin u \, du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u \, du = \sin u + c$$

مثال : $\displaystyle\int 3 \sin 2x \, dx = \frac{3}{2}\int \sin u \, du = \frac{3}{2}(-\cos u) + c$

$$= -\frac{3}{2}\cos 2x + c$$

$$\begin{cases} u = 2x \\ du = 2\,dx \end{cases}$$

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)$$

$$\sqrt{x} = u$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = du$$

$$= 2\int \cos u\,du$$

$$= 2\sin u + c$$

$$\int \sin x\sqrt{1-\cos x}\,dx$$

$$\left(\begin{aligned} 1-\cos x &= u \\ \sin x\,dx &= du \end{aligned}\right)$$

$$= \int u^{1/2}\,du = \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \tfrac{2}{3}(1-\cos x)^{3/2} + C$$

$$\int \sin^5 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx = \int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\,dx$$

$$= \int \sin x\,dx - 2\int \cos^2 x \sin x\,dx + \int \cos^4 x \sin x\,dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$$= -\cos x + 2\int u^2\,du - \int u^4\,du = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$