بسم الله الرحمن الرحیم

مشتق و کاربردهای آن

از موارد جلسه گذشته پرسیده شده که چطور مشتق تابع زیر به آن آمده

به صورت تابع توانی دیده نشده

$$\varphi(x) = \sin^4 2x^2 \rightsquigarrow \varphi' = 4\sin^3 2x^2 (\sin 2x^2)'$$

$$= 4\sin^3 2x^2 (\cos 2x^2)(4x)$$

که در این قسمت از قاعده زنجیره ای استفاده شده

مشتق گیری ضمنی

$f = \{ x, y \mid y = 3x^2 + 5x + 1 \}$ به y در اینجا تابع f را بطور صریح تعریف کرده

اما در عبارت

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$$

را می توان نسبت به y برحسب x حل کرد

در این حالت تابع f با معادله داده شده بطور ضمنی تعریف شده است

مشتق‌گیری ضمنی

در تعریف ضمنی با عرض بفرمایید...

$$\begin{cases} F(x) = x^6 - 2x \\ G(x) = 3y^6 + y^5 - y^2 \end{cases}$$

گه در آن y تابعی از x باشد مثلاً $y = f(x)$، اگر اینطور باشد می‌توان نوشت

$$F(x) = G(f(x))$$

(اگه $y = f(x)$ و $f'(x)$ مشتق y نسبت به x باشد گاهی عناد $D_x y$ رو هم بجای $f'(x)$ بکار می‌برند)

در این صورت با فرض وجود تابع مشتق پذیر $y=f(x)$ داریم:

$$D_x[x^6-2x] = D_x[3y^6+y^5-y^2]$$

مشتق سمت راست با قاعده زنجیری

$$6x^5-2 = 18y^5 \cdot D_x y + 5y^4 \cdot D_x y - 2y D_x y$$

$$6x^5-2 = D_x y\,(18y^5+5y^4-2y)$$

$$D_x y = \frac{6x^5-2}{18y^5+5y^4-2y}$$

* البته معادله بالا که مشتق ضمنی گرفته شد نوع خاصی بود از توابع ضمنی چرا که همه yها در طرف اول تساوی بودند حالت کلی تر را ادامه با ذکر مثال دیگر بررسی کنیم

با فرض اینکه $y=f(x)$ یک تابع مشتق پذیر

$$3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$$

$$12x^3y^2 + 3x^4(2yD_xy) - 7y^3 - 7x(3y^2D_xy) = 0 - 8D_xy$$

$$D_xy(6x^4y - 21xy^2 + 8) = 7y^3 - 12x^3y^2$$

$$D_xy = \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}$$

انبته عرض شد که با فرض وجود تابع مشتق پذیر $y=f(x)$ بخاطر آن است که در بحث ما همواره توابعی داده می‌شود که معادله‌ای از x و y ، y را بطور ضمنی به عنوان تابعی از x تعریف می‌کند و فرض بر این است که یک یا چند تا از این توابع مشتق پذیر هستند در حالی که ممکن است معادله‌ای از x و y وجود تابعی حقیقی را ایجاب نکند مثل معادله $x^2+y^2+4=0$ که به ازای جمیع مقادیر حقیقی x و y برقرار نیست و یا ممکن است معادله‌ای از x و y بوسیله تعداد زیادی تابع مختلف که بعضی مشتق پذیر و برخی مشتق ناپذیر هستند برقرار شود که موارد پیچیدگی این موارد را می‌بینیم.

مثال: به فرض آنکه $(x+y)^2-(x-y)^2=x^4+y^4$ ، D_xy را بیابید

با مشتق گیری ضمنی نسبت به x داریم:

$$2(x+y)(1+D_xy)-2(x-y)(1-D_xy)=4x^3+4y^3D_xy$$

$$2x+2y+(2x+2y)(D_xy)-2x+2y+(2x-2y)(D_xy)=4x^3+4y^3D_xy$$

$$D_xy(4x-4y^3)=4x^3-4y$$

$$D_xy=\frac{x^3-y}{x-y^3}$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $x^3+y^3=9$ در نقطه $(1,2)$ را بیابید

مشتق ضمنی نسبت به x می‌گیریم:

$$3x^2+3y^2D_xy=0$$

$$D_xy=-\frac{x^2}{y^2}$$

بنابراین در نقطه $(1,2)$ $\leftarrow$ $D_xy=-\frac{1}{4}$

پس معادله خط مماس بصورت $y-2=-\frac{1}{4}(x-1)$ خواهد بود

مثال: به فرض آنکه $x\cos y + y\cos x = 1$ باشد، $D_x y$ را بیابید

با مشتق گیری ضمنی نسبت به x به دست می‌آوریم:

$$1\cdot\cos y + x(-\sin y)D_x y + D_x y(\cos x) + y(-\sin x) = 0$$

$$D_x y(\cos x - x\sin y) = y\sin x - \cos y$$

$$D_x y = \frac{y\sin x - \cos y}{\cos x - x\sin y}$$

مثال: به فرض اینکه $x^2+y^2=9$ و $D_x y$ را با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی پیدا کنید

$$2x+2yD_x y=0$$

$$D_x y=-\frac{x}{y}$$

اگر معادله داده شده را نسبت به y حل کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x)\Rightarrow y=\sqrt{9-x^2} \\ f_2(x)\Rightarrow y=-\sqrt{9-x^2} \end{array}\right\}$$

$$f_1(x)=(9-x^2)^{1/2} \rightsquigarrow f_1'(x)=\frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

و به همین صورت $\rightarrow$ $f_2'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

با توجه به اینکه $f_1(x) = \sqrt{9-x^2}$ است پس

$$f_1'(x) = -\frac{x}{y}$$

بنابراین شیب مماس و شیب خط مماس یک بازی رابطه‌ی عکس دارد.

و به ازای y های $f_2(x) = -\sqrt{9-x^2}$

داریم:

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{x}{-\sqrt{9-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

که بازهم نتیجه را گرفتیم.

مثال از مشتق مراتب بالاتر

ذره‌ای در امتداد مستقیم طبق معادله حرکت $S=\frac{1}{2}t^2+\frac{4t}{t+1}$ در حرکت است که در آن S فاصله جهت دار ذره از مبدأ برحسب cm در t ثانیه است

اگر v سرعت لحظه‌ای ($\frac{cm}{Sec}$) در t ثانیه و a شتاب لحظه‌ای در t ثانیه

t و s و v را در $a=0$ تحقیق کنید:

$$v = D_t s = t + \frac{4}{(t+1)^2}$$

$$a = D_t v = D_t^2 s = 1 - \frac{8}{(t+1)^3}$$

$$a=0 \Rightarrow \frac{(t+1)^3 - 8}{(t+1)^3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (t+1)^3 = 8 \quad \Rightarrow (t=1) \cup (t+1=2)$$

و $t=1$ يوجد

$$S = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{4.1}{1+1} = \frac{5}{2}$$

$$V = 1 + \frac{4}{(1+1)^2} = 2$$