بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی ← حد

تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x)=\frac{2x^2+x-3}{x-1} \rightsquigarrow \lim_{x\to 1} f(x)=?$$

وقتی عدد 1 را در عبارت جایگذاری کنیم به $\frac{0}{0}$ منتهی می‌شود ولی در مورد حد

چون نزدیک‌شدن به 1 مدنظر است اعدادی در اطراف آن را بررسی می‌کنیم

مثلاً وقتی $x=0$ را تست کنیم به $f(x)=3$ می‌رسیم

" " $x=2$ " " " $f(x)=7$ "

سمت چپ عدد $x=1$

سمت راست عدد $x=1$

حال به 1 نزدیک‌تر شویم:

$x=0/5 \rightarrow f(x)=4$ $(\to 1)$

$x=1/5 \rightarrow f(x)=6$ $(1 \leftarrow)$

و بازهم نزدیک‌تر:

$x=0/9 \rightarrow 4/8$ $(\to 1)$

$x=1/1 \rightarrow 5/2$ $(1 \leftarrow)$

پس رؤیت می‌کنیم که وقتی x ها به 1 نزدیک می‌شود $A(n)$ به
5 نزدیک می‌شود پس حدود مربوط به پاسخ تابع را با عددگذاری یافته‌ایم
در حالی که از ابتدا این امر مشخص نبود

$\Leftarrow$ در واقع در خود $\underline{\underline{n=1}}$ تابع پاسخ درستی نمی‌دهد ولی می‌توان در محدوده‌ها اطراف
به پاسخ رسید.

حال چطور از روی صفحه تابع می‌توانستیم این مورد را تحقیق کنیم؟

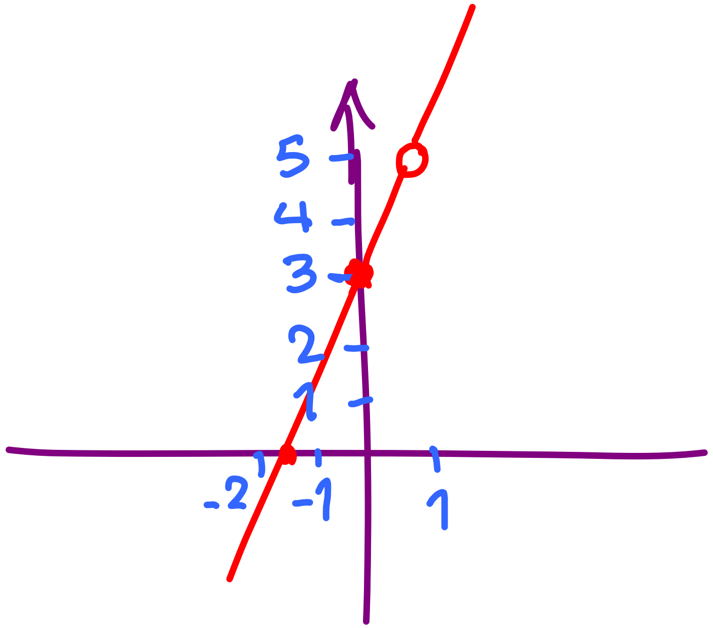
$$\underset{x \to 1}{f(x)} = \frac{2x^2+x-3}{x-1} = ?$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)}$$

اگر $x \neq 1$ باشد صورت و مخرج را می‌توان بر $(x-1)$ تقسیم کرد، آنگاه

$$f(x) = 2x+3 \qquad x \neq 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2(1)+3 = 5$$



پس تجزیه کردن راهش بود .

یک سری قضایای حدی وجود دارد که موارد کاربردی آن را در مثالها بکار میگیریم :

مثال :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = ?$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}} \quad \text{برای } (x \neq 3)$$

$$= \lim_{x \to 3} x^2+3x+9 = \boxed{27}$$

مثال :

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

همچون مثال قبل برای ساده کردن سعی می‌کنیم صورت را گویا کنیم

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}$$

با فرض $x\neq 4$

$$= \lim_{\substack{x\to 4\\ x\neq 4}} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{(\lim_{x\to 4}\sqrt{x})+2} = \frac{1}{4}$$

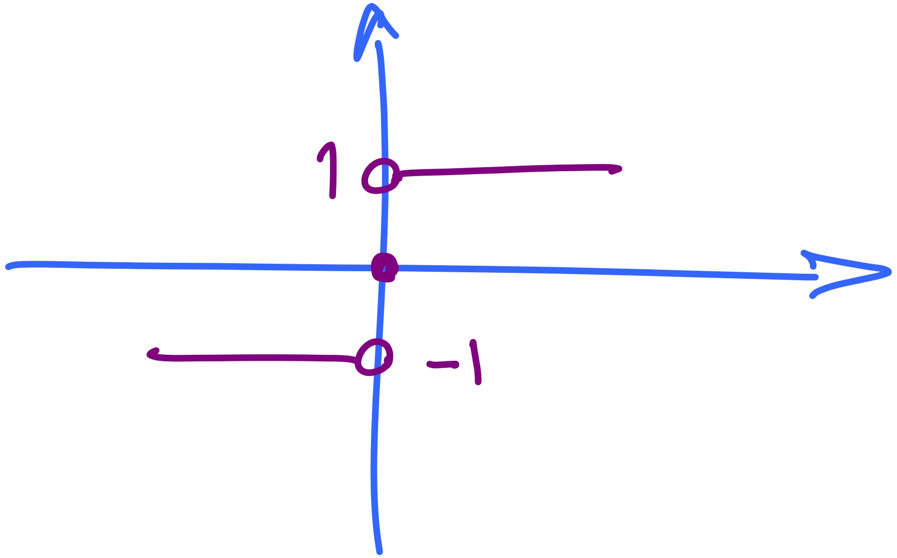
حدود یک طرفه

مثال ← فرض کنید f به صورت زیر تعریف شده باشد. نمودار f را رسم کنید و $\lim_{x\to 0} f(x)$ را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

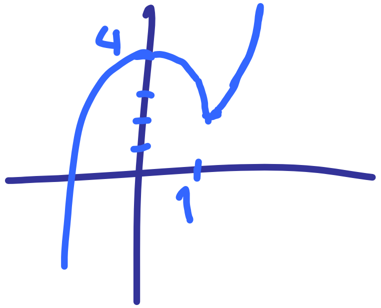
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$$



مثال:

$$h(x)=\begin{cases}4-x^2, & x\le 1\\ 2+x^2, & x>1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x)=3 \;/\; \lim_{x\to 1^+} h(x)=3 \;/\; \lim_{x\to 1} h(x)=3$$



مثال:

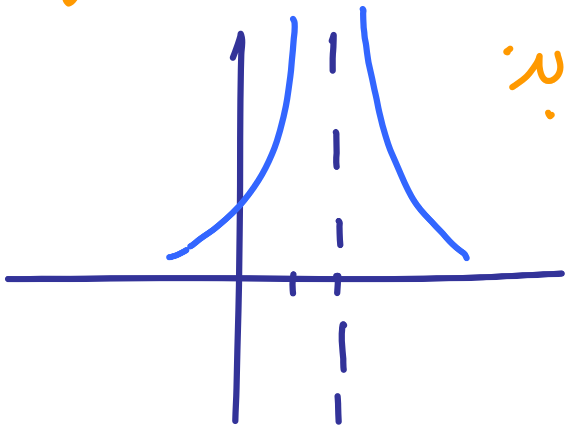
$$f(x)=\begin{cases}x+5 & x<-3\\ \sqrt{9-x^2} & -3\le x\le 3\\ 5-x & x>3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=2 \;/\; \lim_{x\to -3^+} f(x)=0 \;/\; \lim_{x\to 3^-} f(x)=0 \;/\; \lim_{x\to 3^+} f(x)=2 \;/$$

حدود نامتناهی :

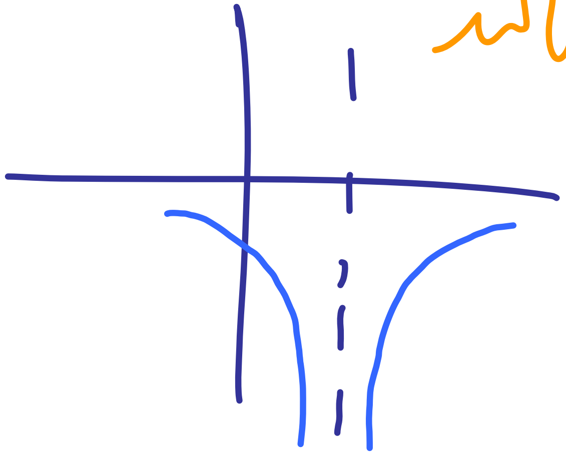
$$\lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

وقتی x از راست یا چپ به 2 نزدیک می‌شود $f(x)$ بدون کران افزایش می‌یابد



و $$\lim \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

$f(x)$ بدون کران کاهش پیدا می‌کند



مثال :

نمودار تابع

$$h(x) = \frac{2x}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$$

مثال :

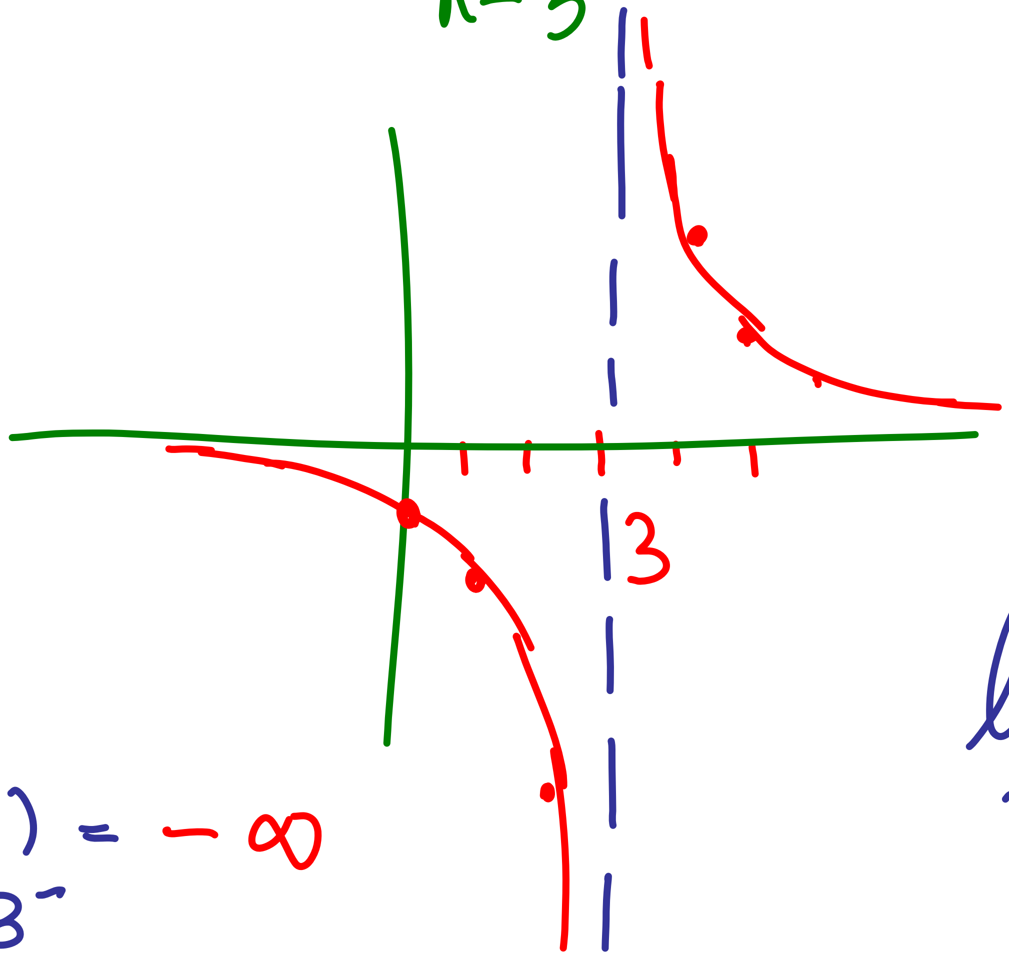
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{(x-2)^2}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\cancel{\sqrt{x-2}}\,\sqrt{x+2}}{\cancel{\sqrt{x-2}}\,\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = -\infty$$

[illegible]

مثال : نمودار تابع $f(x) = \dfrac{3}{x-3}$ را رسم نمایید



که خط‌چین آبی رنگ
مجانب قائم را دارد
و

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

حد در بینهایت:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x-3}{2x+5} = ?$$

جهت ساده سازی و حل صورت و مخرج را بر x تقسیم می کنیم:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4-\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x}}$$

سپس با استفاده از قضایای حدی:

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} 4-\frac{3}{x}}{\lim_{x \to +\infty} 2+\frac{5}{x}} = \frac{\lim_{x \to +\infty} 4 - \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x}}{\lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x}}$$

$$= \frac{\ln 4 - \ln 3 \cdot \ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln 2 + \ln 5 \cdot \ln \frac{1}{n}} = \frac{4 - 3 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0} = 2$$

مثال: حد زیر را بیابید، طرفین را تقسیم بر بزرگترین توان n می‌کنیم (n^3)

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{2n^2 - n + 5}{4n^3 - 1} =$$

$$= \lim_{n \to -\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{4 - \frac{1}{n^3}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \to -\infty} 2 \cdot \lim_{n \to -\infty}\left(\frac{1}{n}\right) - \lim_{n \to -\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \lim_{n \to -\infty} 5 \cdot \lim_{n \to -\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n \to -\infty} 4 - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{2 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 0}{4 - 0}$$

$$= 0$$

مثال:

حد زیر را بیابید:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+4}{\sqrt{2n^2-5}}$$

صورت و مخرج تقسیم بر n می‌شود البته مخرج بر $\sqrt{n^2}$ تقسیم می‌شود با وارد شدن n چون مقادیر مثبت n مد نظر است.

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{n}}{\frac{\sqrt{2n^2-5}}{\sqrt{n^2}}}$$

$$\sqrt{\frac{2n^2-5}{n^2}} = \sqrt{2-\frac{5}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \lim\limits_{n\to+\infty} 4 \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \lim\limits_{n\to+\infty} 5 \cdot \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{3+4\cdot 0}{\sqrt{2-5\cdot 0}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} =$$

مثال قبل برای $x \to -\infty$

صورت مخرج تقسیم بر x و مخرج تقسیم بر $-\sqrt{x^2}$

چون معادل منفی x مدنظر است

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}(3+4/x)}{\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-5}/(-\sqrt{x^2})} = \frac{\lim 3+\lim 4 . \lim \frac{1}{x}}{-\sqrt{\lim 2-\lim 5 . \lim \frac{1}{x^2}}} = \frac{3+4.0}{-\sqrt{2-5.0}} = \frac{3}{-\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\frac{2x^2-5}{-x^2}} = -\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}$$

مثال) حد زیر را بیابید

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = +\infty$$

حد حقیقی موجود نیست و البته از لحاظ مقادیر مثبت به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.