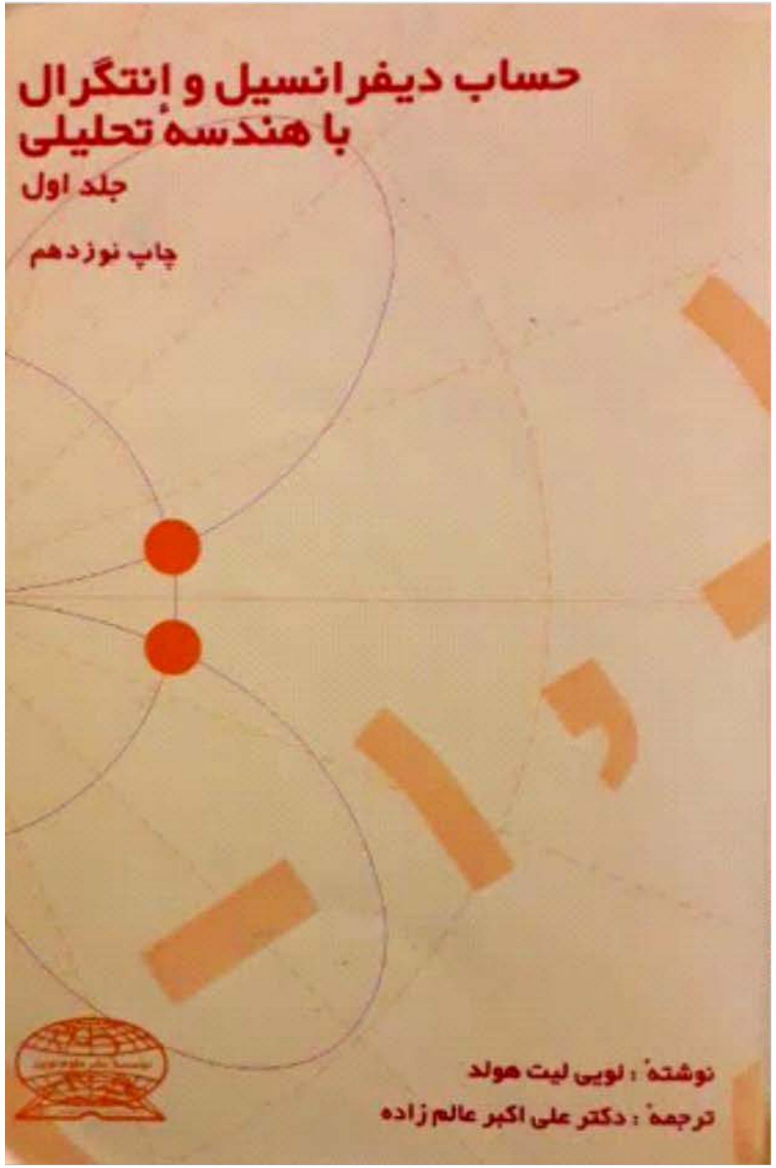


بسم الله الرحمن الرحیم

کلاس ریاضی (۱)

منبع : جزوه کلاس و مباحثی که در کلاس
مطرح می‌گردد.

در جزوه کلاس از کتاب دکتر عالم زاده ←
استفاده می‌گردد و از سلسله جلسات
سخنرانی ریاضی دان فرانسوی
پروفسور سرژ لانگ.

سرفصلها:

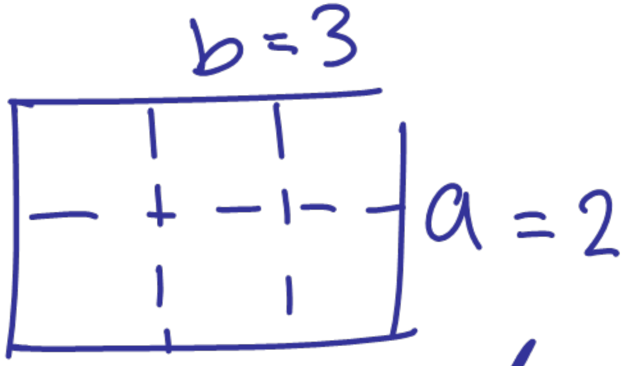
- مقدمات (آشتی با ریاضیات)
- توابع
- حد
- مشتق
- انتگرال
- نرم افزار MAPLE

ورود به بحث (همراه مرور آنچه در جلسه حضوری مورد بحث واقع شد)

اثبات آنچه می دانیم بر پایه تعاریف و بدیهیات گذشته؟

◁ مساحت مستطیل چگونه بدست می آید؟

قبول می کنید که این یک تعریف باشد



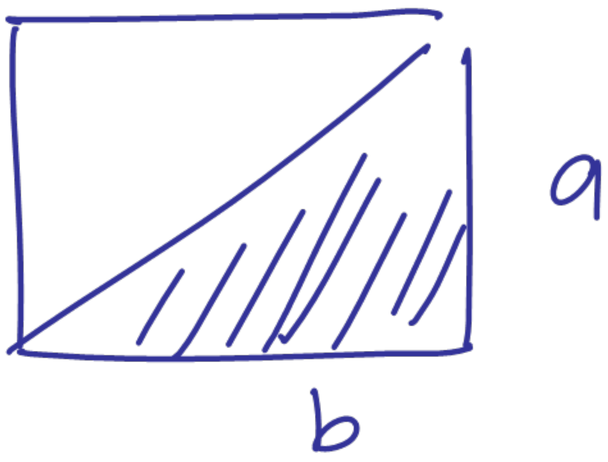
$$A = a \times b$$

$$A = 2 \times 3$$

← شمارش تعداد بلوکهای شکل هم تایید می کند

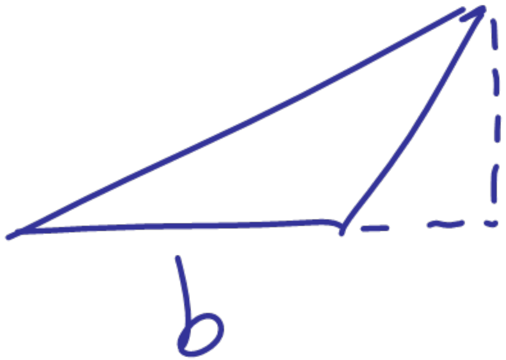
و حالت خاصی هم سراغ نداریم که این قاعده را رد کند

△ مساحت مثلث؟

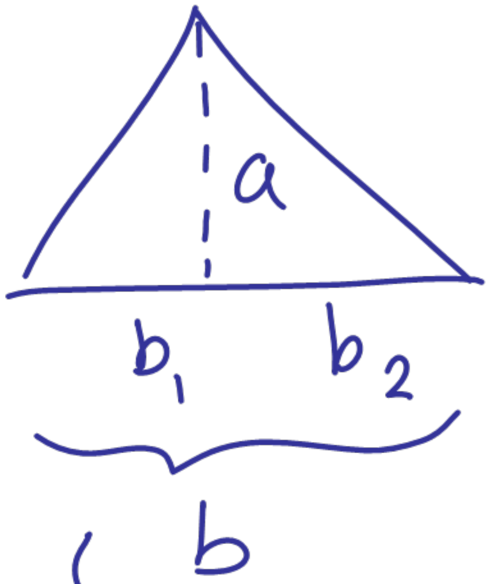


$$A = \frac{a \times b}{2}$$

در مورد مثلث قائم الزاویه مشکلی نداریم و با آنچه از قبل می‌دانیم
ثابت می‌کنیم که $\frac{1}{2}$ قاعده ضرب در ارتفاع مساحت مثلث است
ولی سایر مثلث‌ها چطور؟



ونیز



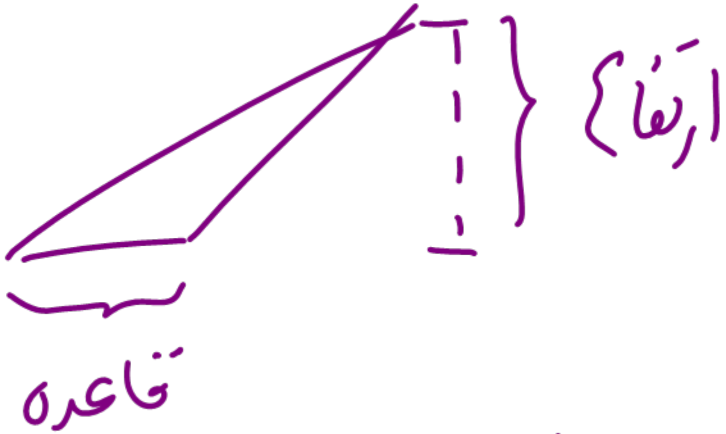
اگر در اثبات از حاصل جمع استفاده کنیم

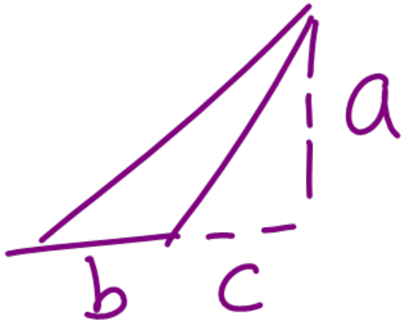
$$A=\frac{1}{2}(ab_1)+\frac{1}{2}(ab_2)$$

$$A=\frac{1}{2}a(b_1+b_2)=\frac{1}{2}ab$$

پس باز هم قاعده ضرب در ارتفاع مساحت مثلث را برای ما بدست می‌آورد.

درمورد مثلث بعدی کافی است از تفاضل استفاده کنید





$$A = \frac{1}{2}(a \times (b+c)) - \frac{1}{2}(a \times c)$$

$$A = \left(\frac{1}{2}(a \times b)\right) + \left(\frac{1}{2}\cancel{(a \times c)}\right) - \left(\frac{1}{2}\cancel{a \times c}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2} a \times b}$$

پس قاعده ضرب در ارتفاع اینجا هم درست

سراغ دایره می‌رویم؛

محیط و مساحت دایره چطور بدست می‌آید

شاید فرمول $2\pi r$ برای محیط و فرمول $(A = \pi r^2)$ برای مساحت را به یاد بیاورید

ولی آیا این رابطه درست است؟

π چیست؟

3,1415....

ادامه عدد به کجا می‌رسد؟

آیا می‌توانیم با حدسی که راجع به فرمول محیط داریم بگوییم محیط تقسیم بر $2r$ یعنی محیط تقسیم بر دو برابر شعاع همان عدد π است

این کار را آزمایش کنید و محیط یک شکل دایره‌ای منسجم را در منزل اندازه گیری نمایید و تقسیم بر قطر آن کنید ببینید به تقریبی از عدد π $(3,14)$ می‌رسید؟

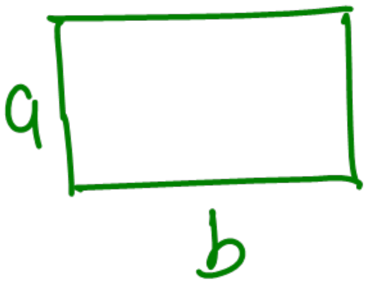
◁ حال سعی می‌کنیم فرمولها مساحت و محیط را با آنچه از قبل می‌دانیم بدست آوریم

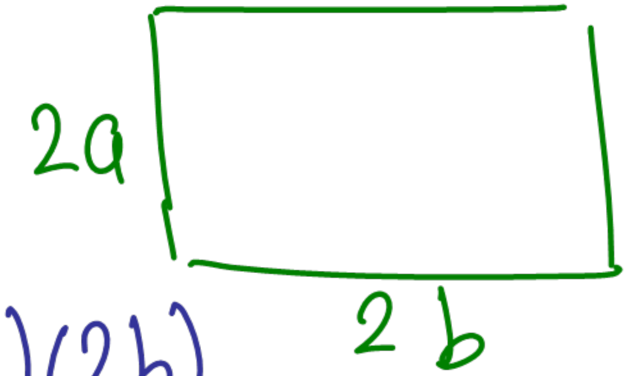
ما از مساحت مستطیل شروع کردیم

اگر مستطیل ما از هر طرف دو برابر شود

مساحت چند برابر میشه

$A_1 = ab$





$A_2 = (2a)(2b)$

$A_2 = (2)^2 A_1$

و اگر از هر طرف 3 برابر شود

$A_3 = (3a)(3b)$

$A_3 = (3)^2 A_1$

پس اگر از هر طرف r برابر شود می‌توانیم بگوییم حجم $r^2 ab$

و مساحت با ضریب r^2 افزایش می‌یابد

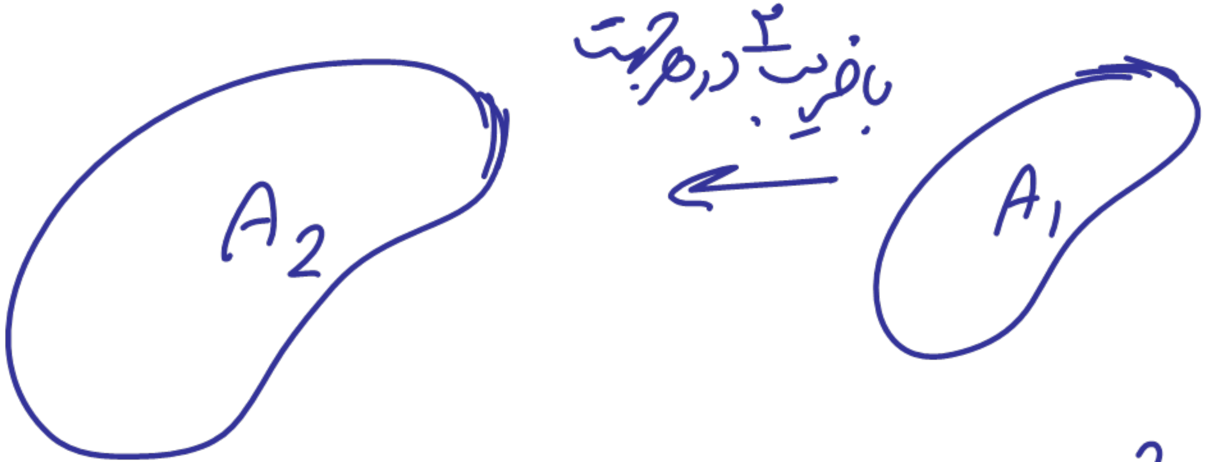
البته فقط افزایش نیست و در مورد کاهش هم می‌توان این را نشان داد

پس $r=\frac{1}{2}$ و یا $r=\frac{1}{3}$ هم همان (r^2) برابر شدن

مساحت را بدست می‌دهد پس بجای افزایش مساحت از اصطلاح

"گسترش" استفاده می‌کنیم.

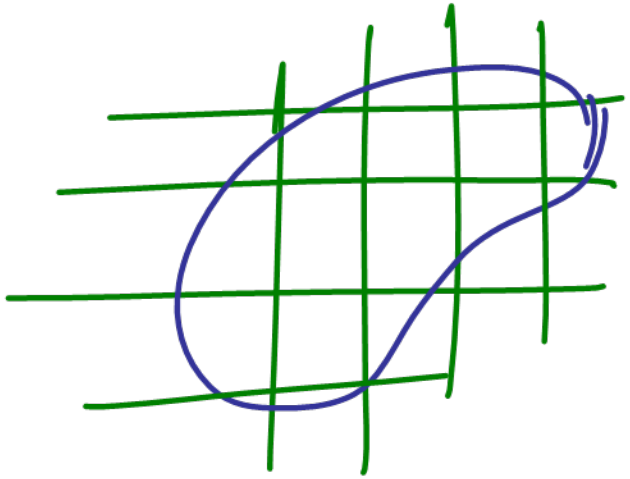
حال بجای مستطیل یک شکل نامنظم مثلاً یک کلیه را در نظر بگیرید



آیا می‌شود گفت که ؟

$$A_2 = (2)^2 A_1 = 4 A_1$$

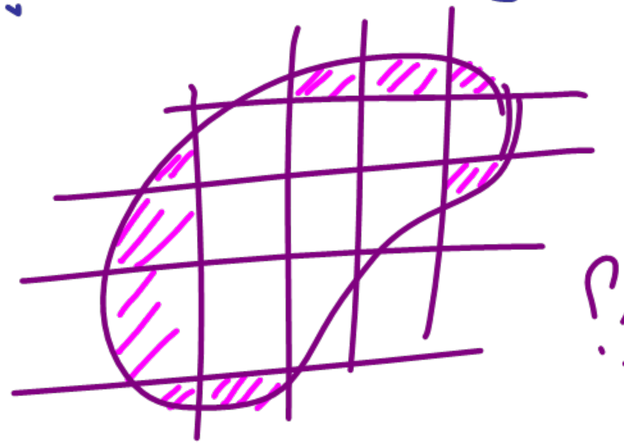
چطور باید این امر ثابت شود ؟



با این تقسیم بندی به مستطیل برگشتیم

درمورد مستطیل ها مطمئن بودیم . اینجا هم مجموعه ای از مستطیل ها هستند

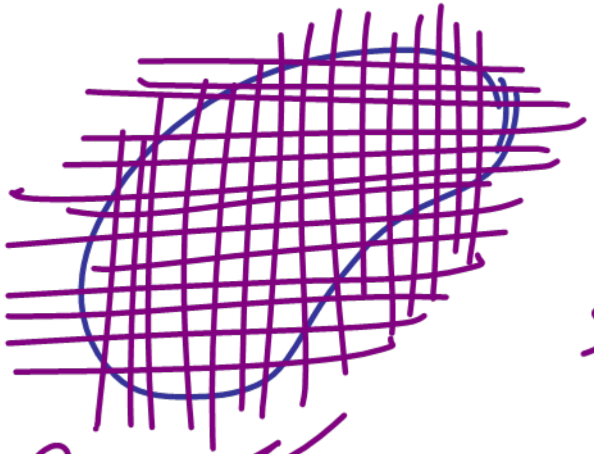
پس گسترش این شکل هم با ضریب (r^2) خواهد بود.



$\triangleleft$ درمورد حاشیه شکل

که غیرمستطیل است چطور بحث می‌کنید؟

بله با ریزتر کردن شبکه تقریب بحث ما کمتر می‌شود .



وقتی شبکه ریزتر شد سهم بیشتری از
شکل ما شامل مستطیل های می شود
که ما هم مساحت آن را می توانیم بدست آوریم و هم قاعده گسترش آن را می دانیم

حال به دایره برگردیم، چطور دایره به شعاع 2 را از دایره به شعاع 1 بسازیم؟

اگر دایره به شعاع 1 درست کنیم و مستطیل های درون آن را اندازه گیری کنیم

به جای 3,14 می‌رسیم و هر چقدر تقسیم‌بندی‌ها ریزتر باشد به ...3,1415 نزدیک‌تر می‌شویم. پس تعریف می‌کنیم که π مساحت دیسک به شعاع واحد است.

حال گسترش (مثلاً 2 برابر شدن دایره در هر جهت) چطور مساحت را تغییر می‌دهد؟

$$A_1 \longrightarrow A_2 = (2)^2 A_1$$

$$A_1 = \pi \xrightarrow{\text{دوبرابر}} A_2 = (2)^2 \pi$$

اگر شعاع r برابر شعاع واحد باشد یعنی شعاع دایره برابر عدد r باشد

$$A_1 = \pi \xrightarrow{\text{برابر } r} A_2 = r^2 \pi$$

در واقع همان $\boxed{A = \pi r^2}$

پس مساحت دایره را اینطور یادت بگیریم

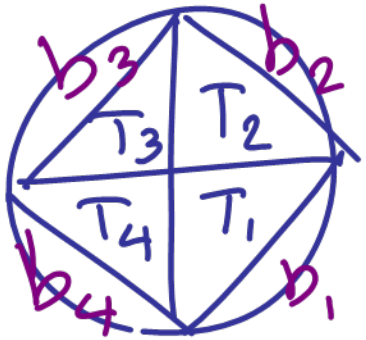
در واقع دیسک

حال محیط دایره چطور بدست می‌آید؟

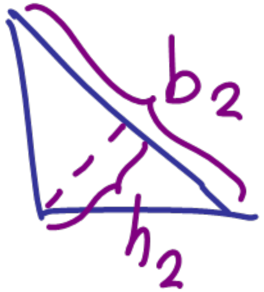
بوسیله آنچه پیش از این دانستیم

که ابزارها مثلث و مستطیل است.

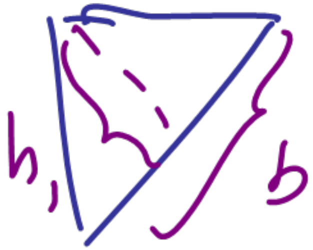
دایره به شعاع r را با ۴ مثلث تخمین میزنیم



هر مثلث



و

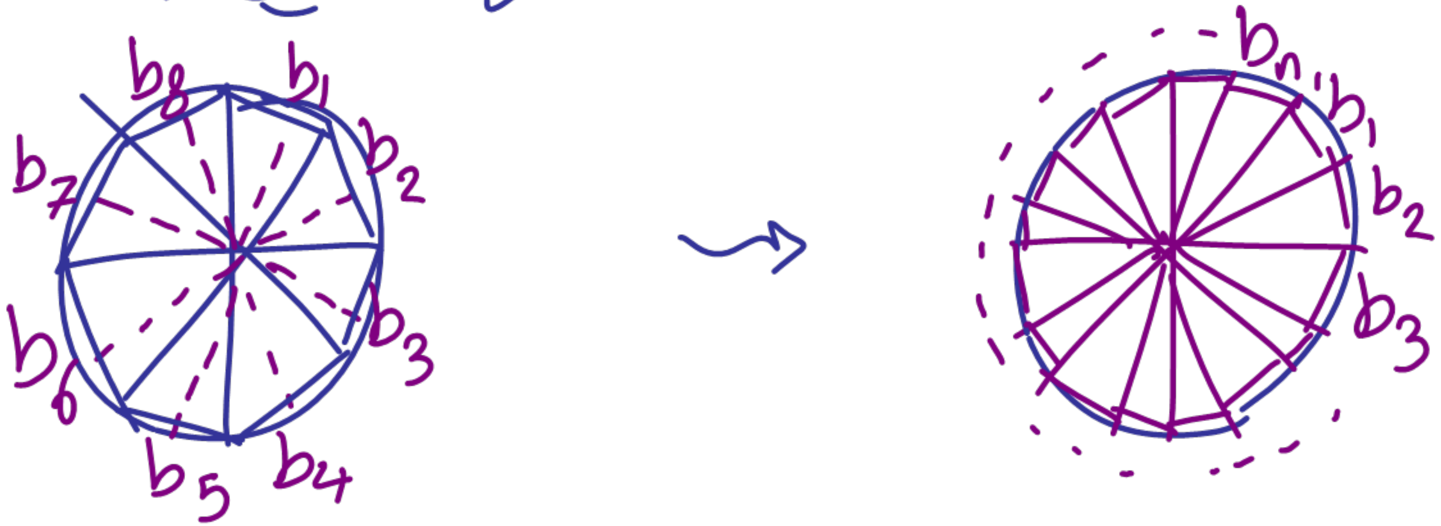


و دو مثلث دیگر

مساحت دایره تخمین زده شده $A = \frac{1}{2}b_1h_1 + \frac{1}{2}b_2h_2 + \frac{1}{2}b_3h_3 + \frac{1}{2}b_4h_4$

چون مثلثها باهم برابرند $= 4\left(\frac{1}{2}b_1h_1\right)$

و اگر تعداد مثلثها بیشتر باشد تقریب دقیق تری را داریم



$$A = n\left(\frac{1}{2} b_n h_n\right)$$

n عدد مثلث

طول دور (C) دیسک به چه میل می‌کند؟ $\left(C = n b_n\right)$

$$A = \frac{1}{2}(n b_n)(h_n)$$

C

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} C h_n$$

ارتفاع مثلث‌های ما (h_n) با ریزتر شدن تقسیمات ما به چه میل می‌کند؟

بله به $\underline{2}$ پاسخ داری

$$A = \frac{1}{2} C r$$

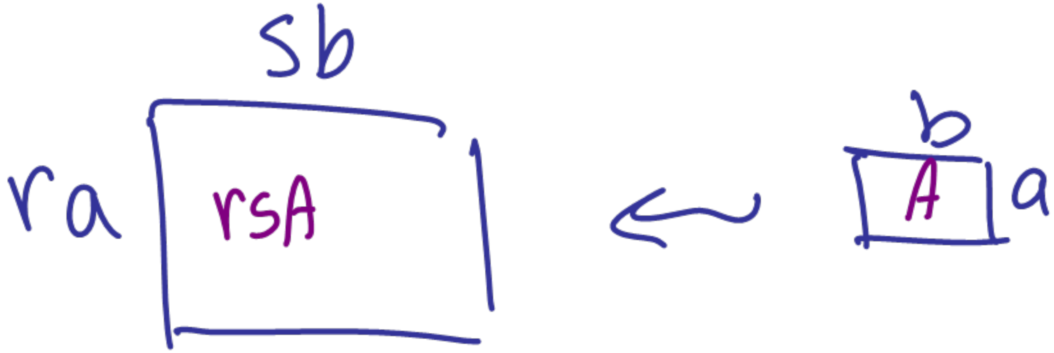
قبلاً مساحت دایره را داشتیم که πr^2 پس

$$\pi r^2 = \frac{1}{2} C r \Rightarrow C = \frac{\pi r^{\cancel{2}}}{\frac{1}{2} \cancel{r}} = 2\pi r$$

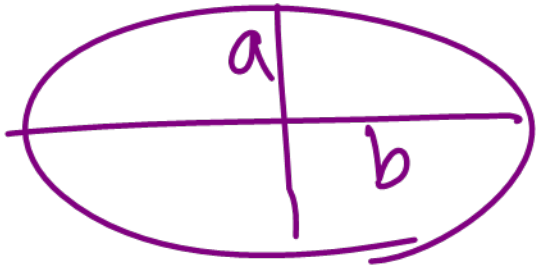
$$\Rightarrow \boxed{C = 2\pi r}$$ محیط دایره

۵ حال حجم را در بعد بالاتر بررسی کنیم .

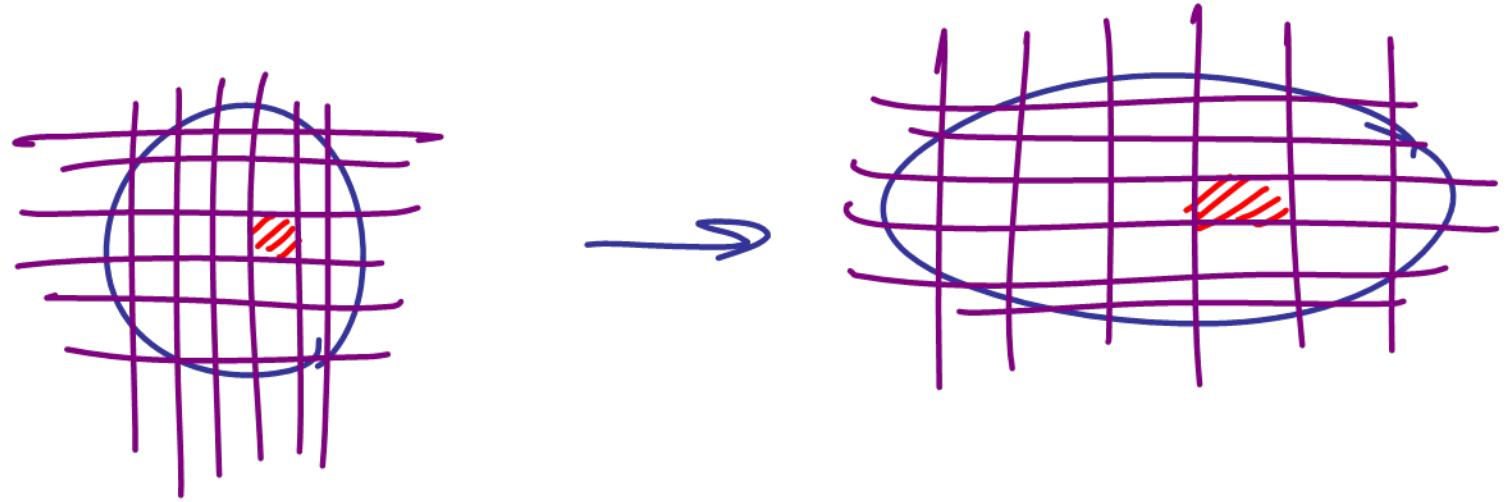
در مورد گسترش مستطیل
اگر در جهت طول s برابر و در جهت عرض r برابر شود A چطور تغییر می‌کند؟



مطابق آنچه پیش از این بررسی شد و نیز مطابق آزمایش فکری که می‌توان طراحی کرد
مساحت (πS) برابر می‌شود و با همین استدلال در مورد دایره‌ی واحد
که در دو جهت بصورت متفاوتی گسترش یابد هم یعنی بیضی:



$$\boxed{A = \pi ab}$$



حال به بعد سوم می روم

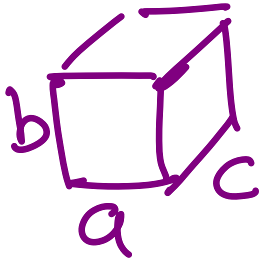
چه چیزی شبیه مستطیل است؟

بله مکعب: طول و عرض و ارتفاع

و در مورد مکعب abc که در هر جهت r برابر بشه، اب

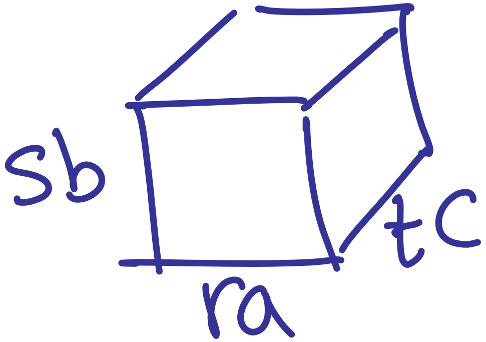
V یا حجم را بدست می‌گیریم

$V = abc$



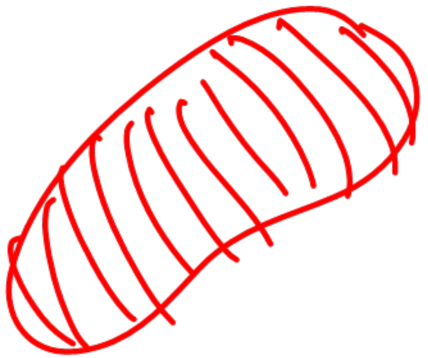
گسترش r برابر $\longrightarrow$ $V_2 = r^3 abc$

و اگر در هر راستا با نسبت خاصی بزرگ شود

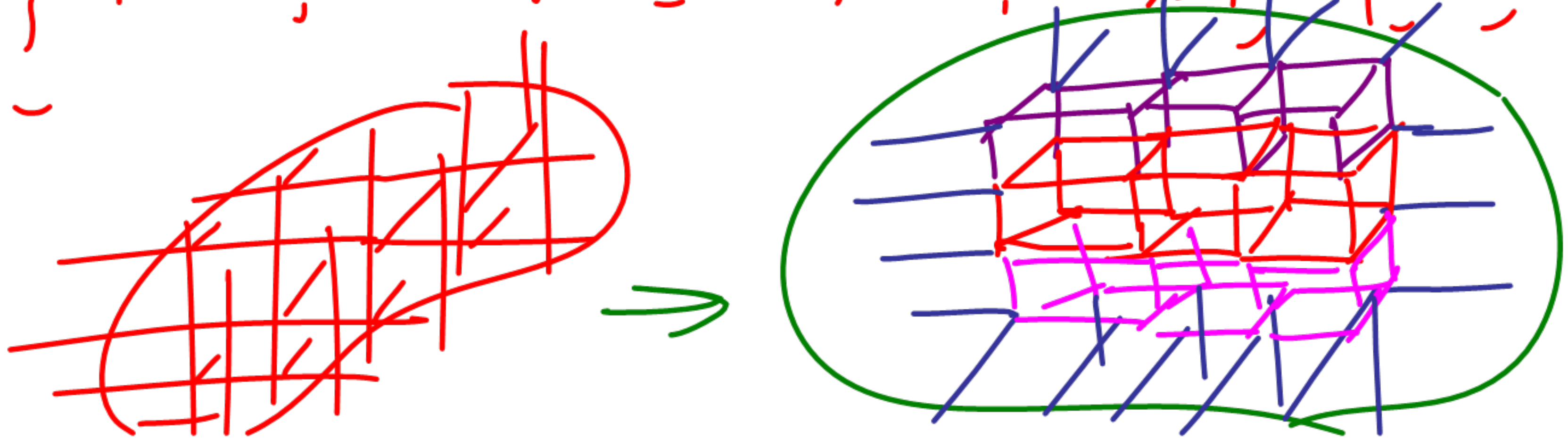


$V_2 = rst\, V_1$

حالا به شکل کلیه که بررسی کرده بودیم برگردیم
البته به صورت سه بعدی.



در دو بعدی با تفکیک شکل به مستطیل‌های کوچک قواعد گسترش را به
اشکال دیگر تعمیم دادیم در سه بعدی هم می‌توانیم شبکه سه بعدی رسم کنیم



پس گسترش شکل خمیده سه بعدی هم با شبکه ریزتر

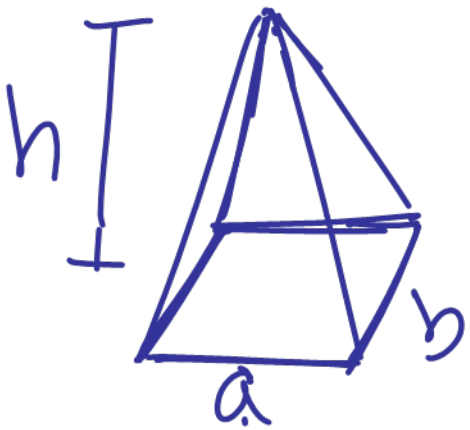
می‌تواند از قاعده گسترش مکعب تبعیت کند می‌شه

$$V_2 = rst\,V_1$$

که r و s و t گسترش در راستای طول و عرض و ارتفاع هستند

و اگر در سه راستا به نسبت r گسترش داشته باشیم

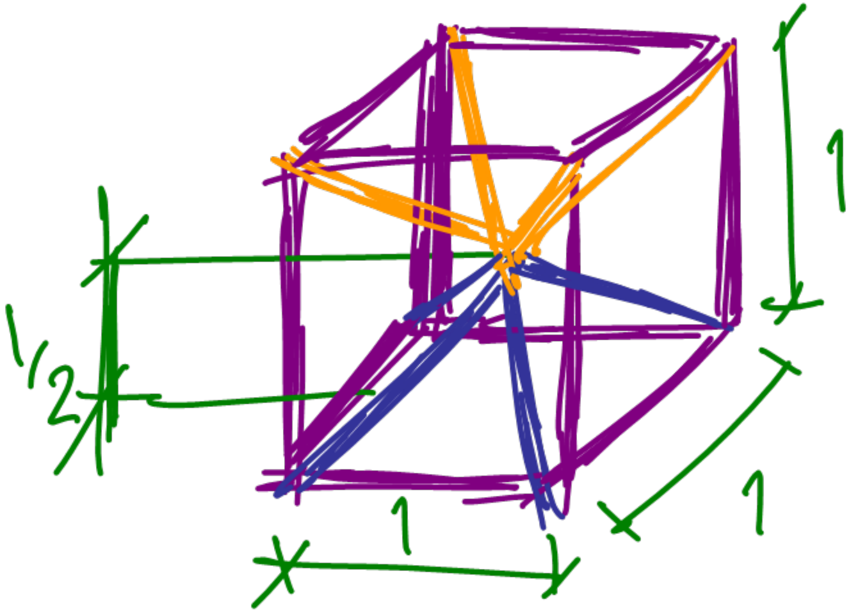
$$V_2 = r^3 V_1$$



درمورد ساحت هرم چه می دانید؟

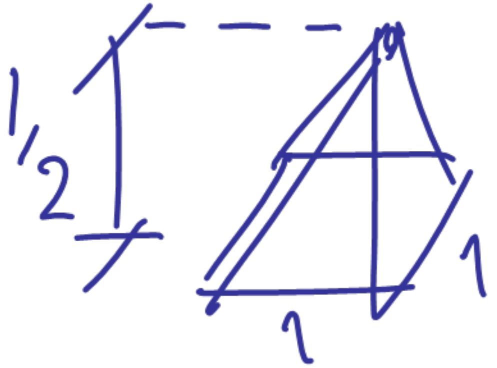
شاید شنیده باشید که $\left(V = \frac{1}{3}abh\right)$

برای اثبات چه کنیم؟



از مکعب واحد استفاده می کنیم

این مکعب با $\underline{6}$ هرم پر می شود



حجم صورت

(حجم $V = \frac{1}{6}$)

* بعد از گسترش مستطیل قاعده در دو راستا به نسبت a و b داریم

$V = \frac{1}{6} ab$

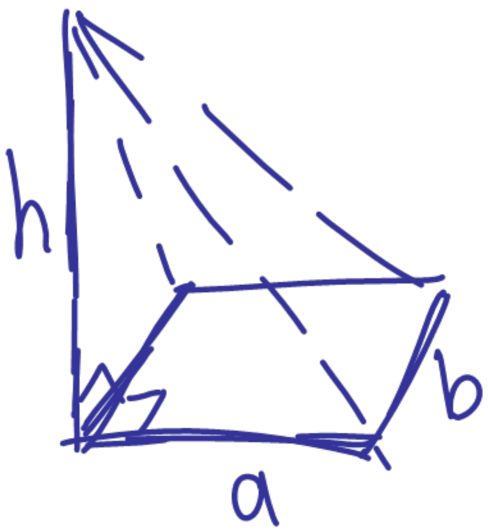
و اگر گسترش در ارتفاع هم دو برابر باشد ← $V = \frac{1}{3} ab$

پس حجم هرم به ارتفاع 1 و اضلاع قاعده a و b می‌شود

$$V = \frac{1}{3}ab$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3}abh}$$ و هرم به ارتفاع دلخواه h می‌شود

حال اگر رأس هرم در مرکز قاعده نبود چه؟



اگر به این ترتیب هرم رسم کنیم یک مکعب‌واره

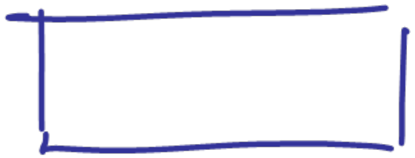
شامل 3 هرم است

$\text{ح.} = \frac{1}{3} abh$

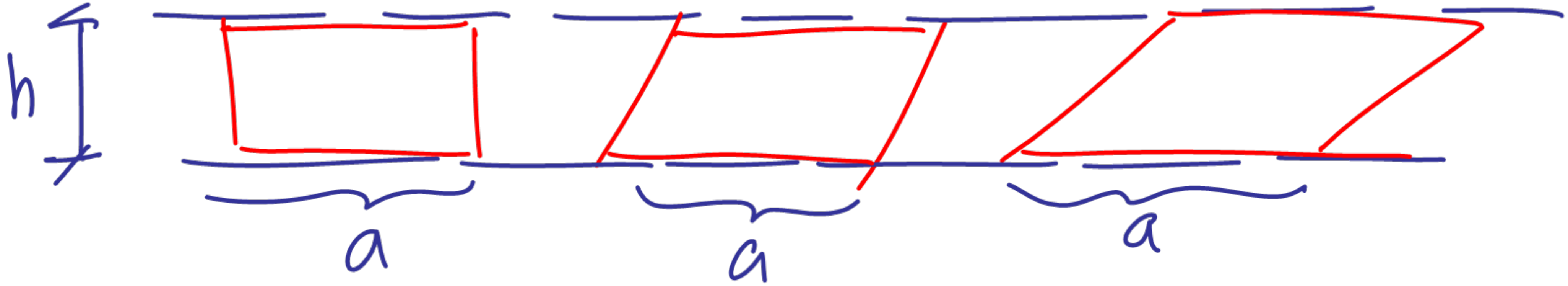
که همان رابطه قبلی است

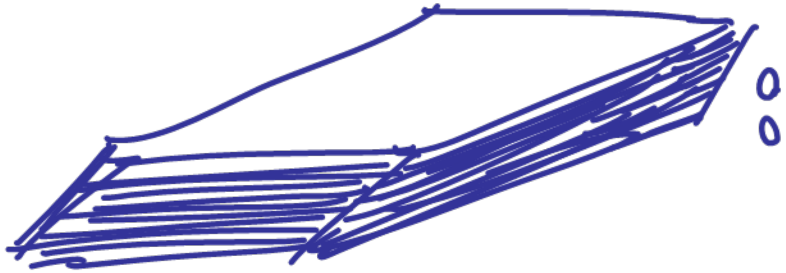
به بعد دوم برمی‌گردیم:

یک مستطیل برمی‌داریم



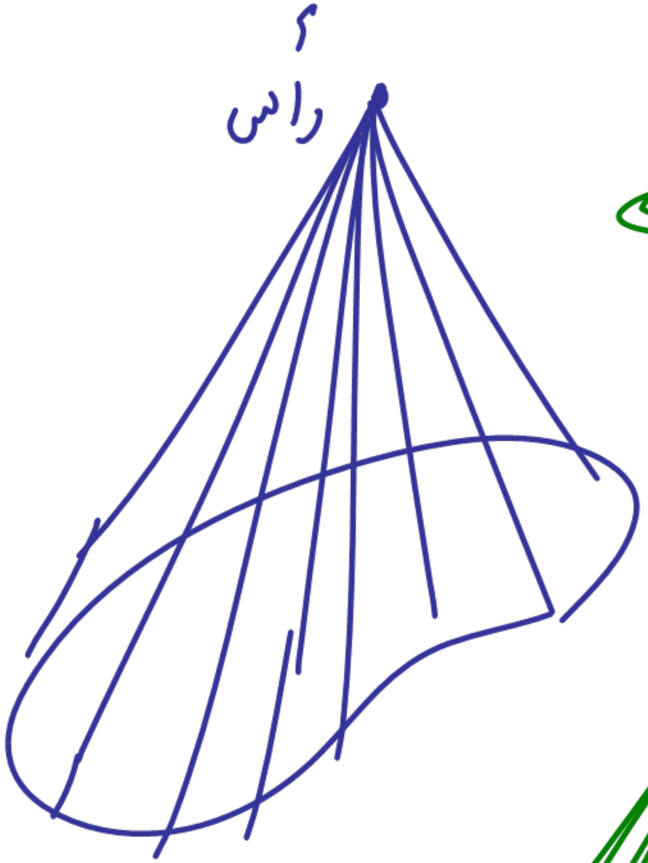
اگر این مستطیل را یکی از وجوه یک دسته کاغذ و یا یک دسته
کارت اعتباری در نظر بگیریم و آنها را روی هم سر بدهیم چه می‌شود؟





و مساحت تغییری نمی‌کند و دسته بعدی؟

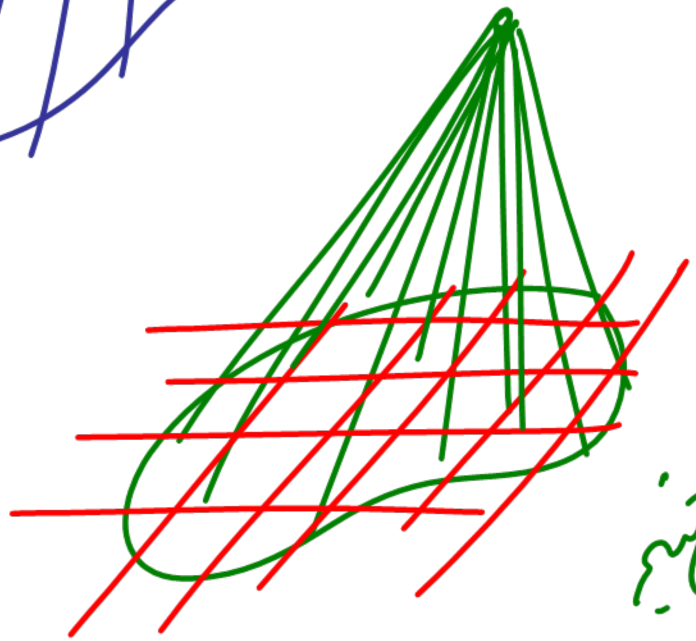
حجم جسم با کج کردن تغییر نمی‌کند



در مورد مخروط چطور و یا هرم با قاعده دلخواه

حجم مخروط $\leftarrow$ $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

برای اثبات روش کار را می دانید



برای هرم $V=\frac{1}{3}abh$

و بعد برای مخروط که قاعده دایره ای دارد

بجای ab ، πr^2 را جایگذاری می کنیم