بسم الله الرحمن الرحیم

اگر معادلات بالا را برای یک مود بازنویسی کنیم تعامد مودهای ارتعاشی ایجاب می‌کند که:

$$[\varphi_i]^T [M] [\varphi_i] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & M_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$ ماتریس جرم مودی

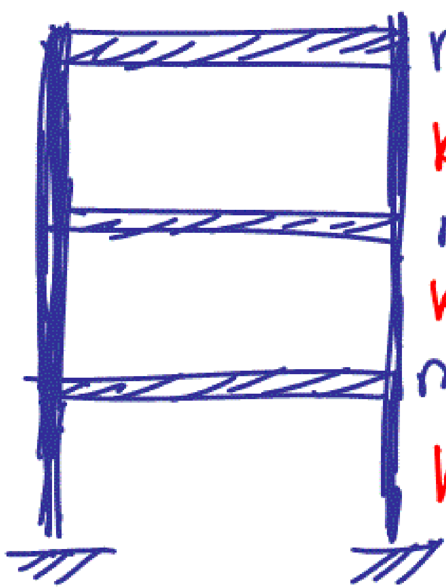
$$[\varphi_i]^T [K] [\varphi_i] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & K_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$ ماتریس سختی مودی

ماتریس‌های شکل مودی

مثال

مطلوب است فرکانس‌های سازه و تشکیل ماتریس شکل‌های ارتعاشی

و بدست آوردن جرم‌های مودی و سختی‌های مودی:



$m_3 = 70$ ton

$k_3 = 30 \times 10^3$ kN/m

$m_2 = 80$

$k_2 = 40 \times 10^3$

$m_1 = 80$

$k_1 = 50 \times 10^3$

$$m = \begin{bmatrix} 80 & & \\ & 80 & \\ & & 70 \end{bmatrix}$$

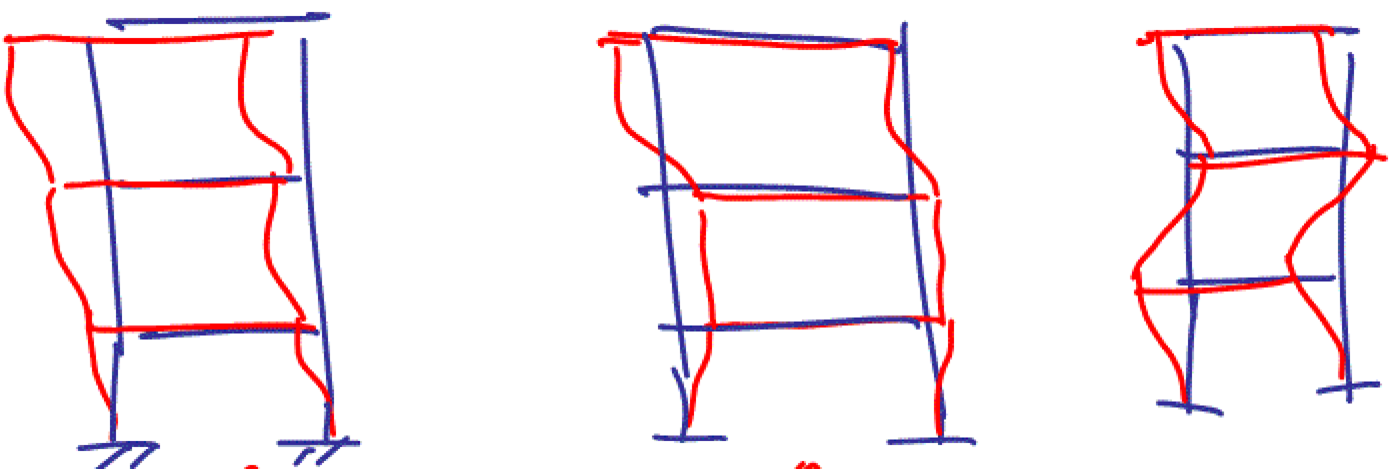
$$k = \begin{bmatrix} 90 & -40 & 0 \\ -40 & 70 & -30 \\ 0 & -30 & 30 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$\left|[k]-\omega^2[m]\right|=0 \qquad \frac{\omega^2}{10^3}=\lambda$$

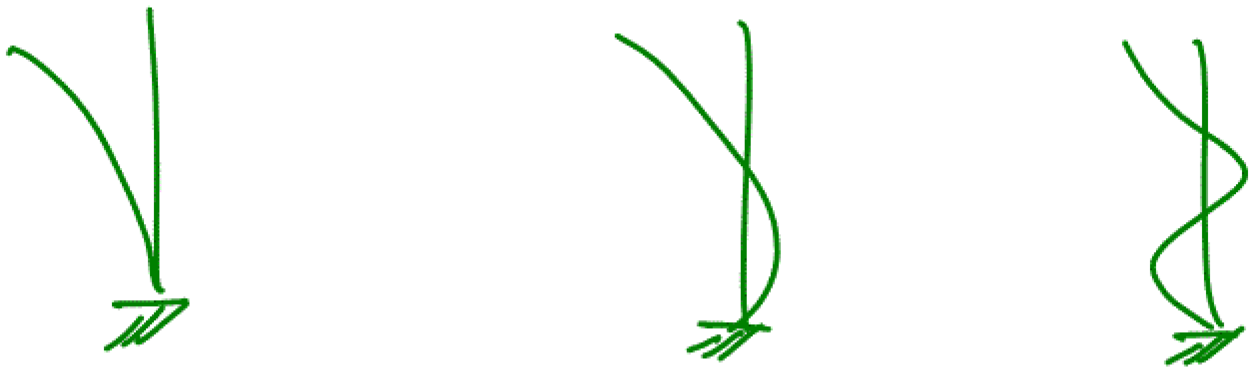
$$\begin{vmatrix} 90-80\lambda & -40 & 0 \\ -40 & 70-80\lambda & -30 \\ & -30 & 30-70\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 10{,}72 \\ \omega_2 \quad 27{,}21 \\ \omega_3 \quad 39{,}66 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{ccc}
\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\
\begin{bmatrix} -0.0326 \\ -0.0659 \\ -0.0900 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.0697 \\ 0.0536 \\ -0.0737 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -0.0811 \\ 0.0727 \\ -0.0272 \end{bmatrix}
\end{array}
$$



φ_1 φ_2 φ_3



برای بدست آوردن $\{M_i$ و $\{K_i$ (جرم‌ها و سختی‌های مودی)

$$[\varphi_i]^T [m] [\varphi_i] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & M_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\varphi_i]^T [k] [\varphi_i] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114{,}9 & & \\ & 739{,}43 & \\ & & 1574{,}43 \end{bmatrix}$$

لوبیله جرم مودی وسختی مودی q

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{114{,}9}{1}} = 10{,}71$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{739{,}43}{1}} = 27{,}19$$

$$\omega_3 = 39{,}67$$

پاسخ ارتعاش آزاد معادلات حرکت سیستم نامیرا

$$[m][\ddot{u}] + [k]\{u\} = \{0\}$$

$$\{u(t)\} = \sum_{i=1}^{N} q_i(t)\{\varphi_i\} = [\varphi]\{q(t)\}$$

$$[m][\varphi]\{\ddot{q}(t)\} + [k][\varphi]\{q(t)\} = \{0\}$$

$$\underbrace{[\varphi]^T[m][\varphi]}_{[M_i]}\{\ddot{q}(t)\} + \underbrace{[\varphi]^T[k][\varphi]}_{[k_i]}\{q(t)\} = \{0\}$$

ماتریس جرم عمومی

ماتریس سختی عمومی

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & M_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\{\ddot{q}(t)\} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_n & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\{q(t)\} = \{0\}$$

$\underline{n}$ معادله دیفرانسیل غیردرگیر

$$* \quad \boxed{u(t) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_n \left[q_n(0) \cos\omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin\omega_n t \right]}$$

$$\{u(0)\} = \sum_{i=1}^{N} \{\varphi_i\} q_i(0)$$

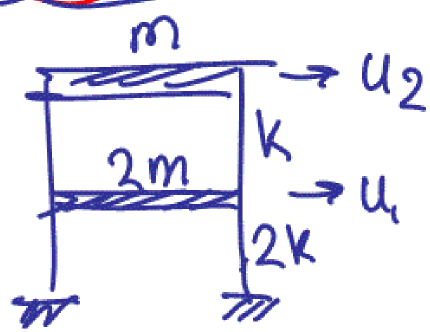
$$\longrightarrow \{\varphi_i\}^T [M] \{u(0)\} = \{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\} q_i(0)$$

$$\{\varphi_i\}^T [M]$$

$$q_i(0) = \frac{\{\varphi_i\}^T[M]\{u(0)\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}$$

$$\dot{q}_i(0) = \frac{\{\varphi\}^T[M]\{\dot{u}(0)\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}$$

مثال ۵



$$u(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{u}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

شرایط اولیه

$$\left| [k] - \omega^2 [m] \right| = 0$$

ایجاد دامنه

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{k/m} \\ \omega_2 = \sqrt{2k/m} \end{cases}$$

$$\left[[k] - \omega^2 [m] \right] \{\varphi\} = 0$$

ابعاد دلخواه

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$a_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$$

$$q_1(0) = \frac{\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}} = 2$$

$$q_2(0) = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}} = 0$$

$$\boxed{u(t) = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} 2\cos\omega_1 t}$$

تمرین: با شرایط اولیه $u(0)=\begin{Bmatrix}3\\1\end{Bmatrix}$

$$\dot{u}(0)=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

چه معادله ای بدست می آید

فاکتور میرایی کلاسیک:

اگر میرایی متناسب با جرم باشد

$$[c] = a_0 [m]$$

$$C_n = a_0 m_n \rightarrow a_0 = 2 \xi_n \omega_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi_n = \frac{a_0}{2\omega_n}}$$

واگر میرایی متناسب با سختی باشد؟

$$[c] = a_1 [k]$$

$$c_n = a_1 \omega_n^2 m_n \rightsquigarrow 2\xi_n \omega_n m_n = a_1 \omega_n^2 m_n$$

$$a_1 = \frac{2\xi_n}{\omega_n} \qquad \boxed{\xi_n = \frac{a_1}{2}\omega_n}$$

میرایی رایلی ← میرایی را متناسب با جرم و سختی در نظر می‌گیریم

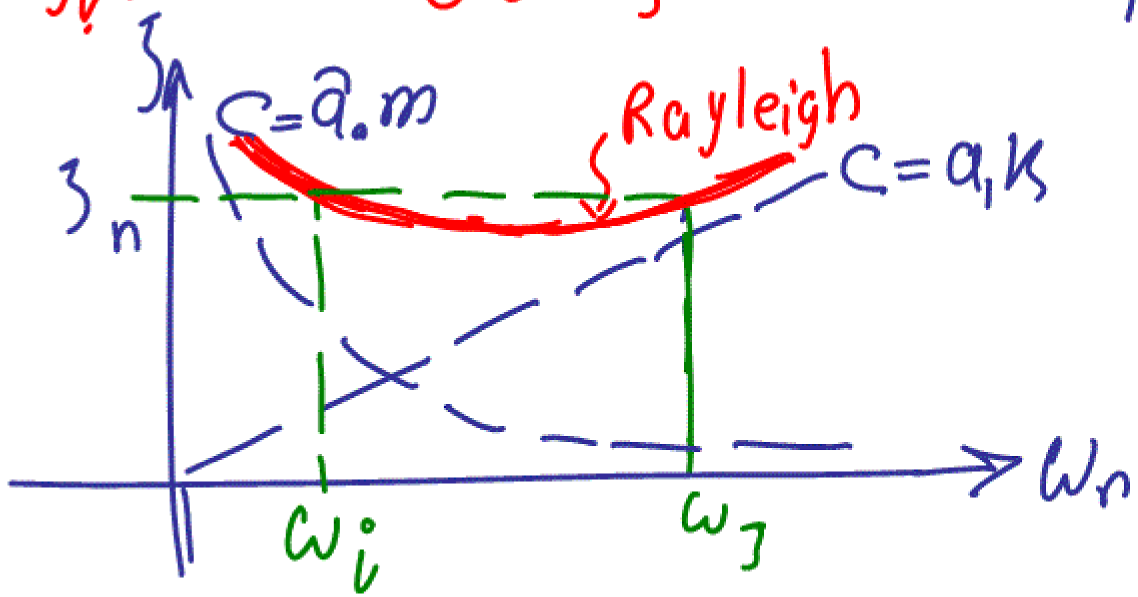
$$\boxed{[c] = a_0 [m] + a_1 [k]}$$

$$\xi_n = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2}\omega_n$$

نوشتن ζ_n برای دو ω تحلیل

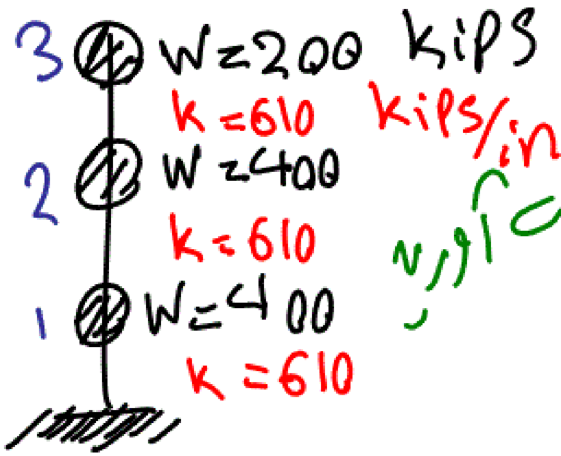
ω_i و ω_j وصل دو معادله دو مجهولی

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \zeta \dfrac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \\ a_1 = \zeta \dfrac{2}{\omega_i + \omega_j} \end{cases}$$



مثال :

برای سازه 3 طبقه برشی زیر، ماتریس میرایی رایلی را به گونه‌ای تعیین کنید که میرایی مودهای اول و دوم 5٪ باشد. میرایی مود سوم را بدست آورید



در منزل بدست آورید

$$\begin{cases} \omega_1 = 12{,}57 \ \text{rad/s} \\ \omega_2 = 34{,}33 \\ \omega_3 = 46{,}89 \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{Bmatrix} .401 \\ .695 \\ .803 \end{Bmatrix} \qquad \varphi_2 = \begin{Bmatrix} .803 \\ 0 \\ -.803 \end{Bmatrix} \qquad \varphi = \begin{Bmatrix} .401 \\ -.695 \\ .803 \end{Bmatrix}$$

$$\left[[k] - \omega^2 [m] \right] [\varphi] = 0$$

$$[m] = \frac{1}{386} \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \qquad [k] = 610 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\zeta_n = \frac{a_0}{2} \times \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2}\omega_n}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/12{,}57 & 12{,}57 \\ 1/34{,}33 & 34{,}33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \%5 \\ \%5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0/9198 \\ a_1 = 0/0021 \end{cases}$$

$$[C] = a_0 m + a_1 k = \begin{bmatrix} 3{,}55 & & & \\ -1{,}28 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\xi_3 = \frac{a_0}{2}\,\frac{1}{\underset{46{,}89}{\omega_3}} + \frac{a_1}{2}\,\underset{46{,}89}{\omega_3} = 0/0593$$

پاسخ سیستم چند درجه آزادی میرا با میرایی کلاسیک در حالت ارتعاش آزاد

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} \{u(0)\} \\ \{\dot{u}(0)\} \end{cases}$$

$$[m][\varphi]\{\ddot{q}(t)\} + [c][\varphi]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{0\}$$

— پیش ضرب در $[\varphi]^T$ ↲

$$\begin{cases} M_n = \{\varphi\}^T [m] \{\varphi\} \\ k_n = \{\varphi\}^T [k] \{\varphi\} \\ C = \{\varphi\}^T [c] \{\varphi\} \end{cases}$$

درصورتی که میرایی کلاسیک باشد ماتریس $[C]$ قطری خواهد بود

$$\boxed{M_n \ddot{q} + C_n \dot{q} + k_n q = 0}$$

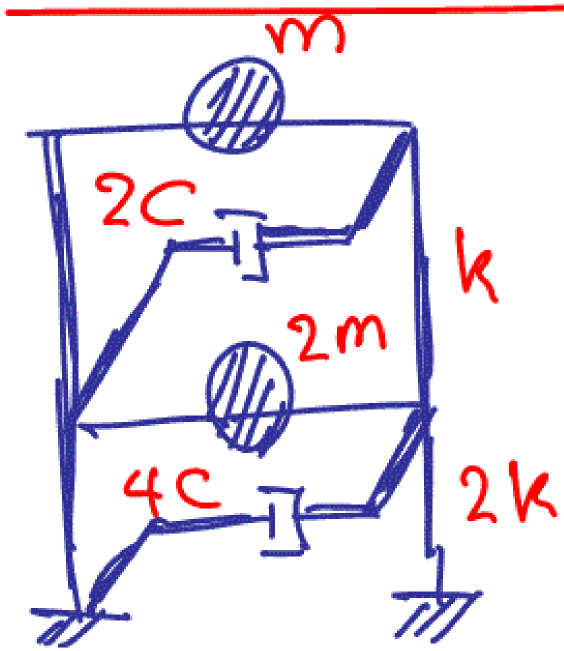
$$\zeta_n = \frac{C_n}{2 M_n \omega_n}$$

$$\hookrightarrow \quad \ddot{q}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0$$

$$\boxed{q_n = e^{-\xi_n\omega_n t}\left\{q_n(0)\cos(\omega_{nD}t) + \frac{\dot{q}(0) + \xi\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}}\sin\omega_{nD}\right\}}$$

$$\begin{cases} \omega_{nD} = \omega_n\sqrt{1-\xi_n^2} \\ q(0) = \dfrac{\{\varphi_n\}^T[m]\{u(0)\}}{\{\varphi_n\}^T[m]\{\varphi_n\}} \\ \dot{q}(0) = \dfrac{\{\varphi_n\}^T[m]\{\dot{u}(0)\}}{\{\varphi_n\}^T[m]\{\varphi_n\}} \end{cases}$$

مثال ۵ پاسخ ارتعاش آزاد؟



الف) $u(0)=\begin{Bmatrix}1/2\\1\end{Bmatrix}$, $\dot{u}(0)=\begin{Bmatrix}9\\0\end{Bmatrix}$

ب) $u(0)=\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}$, $\dot{u}(0)=\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}$

$$m = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 6c & -2c \\ -2c & 2c \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \rightsquigarrow \varphi_1 = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \rightsquigarrow \varphi_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$q_1(0) = 1$$

$$\dot{q}_1(0) = 0$$

$$\begin{cases} q_2(0) = 0 \\ \dot{q}_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\omega_{nD} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-\xi_1 \omega_1 t} \left(\cos \omega_{1D} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_{1D} t \right)$$

ب)

$$q_2(0)=1 \qquad \begin{cases} q_1(0) \quad 0 \\ \dot{q}_1(0)=0 \end{cases}$$

$$\dot{q}_2(0)=0$$

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-\xi_2 \omega_2 t} \left(\cos \omega_{2D} t + \frac{\xi_2}{\sqrt{1-\xi_2^2}} \sin \omega_{2D} t \right)$$

تحلیل مودال

Modal Analysis

معادله حرکت $[m]\{\ddot{u}\}+[c]\{\dot{u}\}+[k]\{u\}=\{p(t)\}$

$$\{u(t)\}=\sum_{n=1}^{N}\{\varphi_n\}\,q_n(t)=[\varphi]\{q(t)\}$$

$$\sum_{n=1}^{N} [m]\{\varphi_n\}\ddot{q}(t) + \sum_{n=1}^{N} [c]\{\varphi_n\}\dot{q}(t) + \sum_{n=1}^{N} [k]\{\varphi_n\} q_n(t) = \{P(t)\}$$

پیش ضرب در $\{\varphi_n\}^T$

$$\sum_{n=1}^{N} \overbrace{\{\varphi_n\}^T[m]\{\varphi_n\}}^{M_n}\ddot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{N} \overbrace{\{\varphi_n\}^T[c]\{\varphi_n\}}^{C_n}\dot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{N} \overbrace{\{\varphi_n\}^T[k]\{\varphi_n\}}^{K_n} q_n(t) =$$

$$\underbrace{\{\varphi_n\}^T\{p(t)\}}_{P_n}$$

$$M_n\ddot{q}_n + C_n\dot{q}_n + k_n q_n = P_n(t)$$

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n(t)}{M_n}$$

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N}\{u_n(t)\} = \sum_{n=1}^{N}\{\varphi_n\}q_n(t)$$

محاسبه نیروها

روش اول :

$$V(t) = \sum_{n=1}^{N} V_n(t)$$

روش دوم :

نیروی استاتیکی معادل برای هر مود

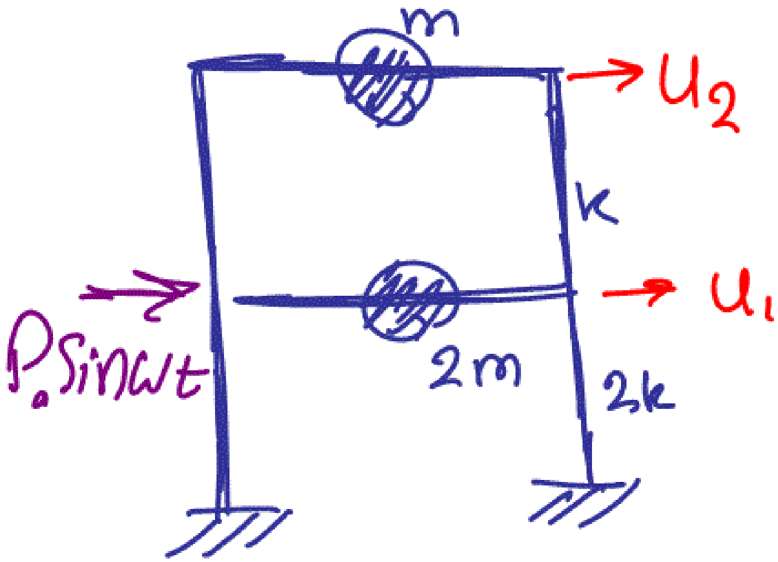
$$\{f_n(t)\} = [k]\{u_n(t)\}$$

$$= [k]\{\varphi_n\}\, q_n(t)$$

$$= \omega_n^2 [M]\{\varphi_n\}\, q_n(t)$$

مثال

پاسخ پایدار سازه زیر را بدست آورید



مشخصات دینامیکی:

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{2m}} \longrightarrow \varphi_1 = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}} \longrightarrow \varphi_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\{\varphi\}^T[m]\{\varphi\} = M_n$$

جرمهای تعمیمی مودی

$$\begin{cases} M_1 = \frac{3}{2}m & K_1 = \frac{3}{4}k \\ m_2 = 3m & K_2 = 6k \end{cases}$$

نیروی تعمیم یافته مودی

$$P_1(t) = \{\varphi_1\}^T\{P(t)\}$$

$$= \{\tfrac{1}{2} \quad 1\}\begin{Bmatrix} P_0 \sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{P_0}{2}\sin\omega t$$

P_{01}

$$P_2(t) = \{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} P_0 \sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix} = -P_0 \sin\omega t$$

$$-P_0 = P_{02}$$

* حل معادلات موردی :

* می دانیم برای رابطه $(m\ddot{u} + ku = P_0 \sin\omega t)$ داریم

$$u(t) = \frac{P_0}{k}(MF)\sin\omega t$$

$$(MF) = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

$$
\begin{cases}
q_1(t) = \dfrac{2P_0}{3k}(M.F.)_1 \sin \omega t \\
q_2(t) = -\dfrac{P_0}{6k}(M.F.)_2 \sin \omega t
\end{cases}
$$

؟ محاسبه پاسخ مودی

$$
\boxed{\{u_n(t)\} = \{\varphi_n\} q_n(t)}
$$

مود اول $\{u_1(t)\} = \{\varphi_1\} \dfrac{2P_0}{3k}(MF)_1 \sin\omega t$

مود دوم $\{u_2(t)\} = \{\varphi_2\} \dfrac{-P_0}{6k}(MF)_2 \sin\omega t$

---

* محاسبه پاسخ کل

$$\{u\} = \sum_{n=1}^{N} \{u_n(t)\}$$

1 درجه آزادی ← $u_1(t)$

2 " " ← $u_2(t)$

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{P_0}{6k}\left(2(MF)_1 + (MF)_2\right)\sin\omega t \\ \dfrac{P_0}{6k}\left(4(MF)_1 - (MF)_2\right)\sin\omega t \end{Bmatrix}$$

مطابق روش اول :

$$k_1 = 2k$$

درجه آزادی 1 مود n
درجه آزادی 2 مود n

$$\begin{cases} V_{1n}(t) = k_1 u_{1n}(t) = k_1 \varphi_{1n} q_n(t) \\ V_{2n}(t) = k_2 [u_{2n}(t) - u_{1n}(t)] = k_2 [\varphi_{2n} - \varphi_{1n}] q_n(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{11} = \frac{2P_0}{3} R_1 \sin \omega t \\ V_{12} = \frac{P_0}{3} R_2 \sin \omega t \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{21} = \frac{P_0}{3} R_1 \sin \omega t \\ V_{22} = \frac{-P_0}{3} R_2 \sin \omega t \end{cases}$$

* پاسخ کل برای هر درجه آزادی

درجه آزادی ۱ $\rightarrow$ $V_1(t) = \frac{P_0}{3}(2R_1 + R_2)\sin\omega t$

درجه آزادی ۲ $\rightarrow$ $V_2(t) = \frac{P_0}{3}(R_1 - R_2)\sin\omega t$

مطابق روش دوم

$$f_{in} = \omega_n^2 m_i \varphi_{in} q_n$$

$$f_{11} = \left(\frac{k}{2m}\right)(2m)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2P_0}{3k}(MF)_1 \sin\omega t\right)$$

$$= \frac{P_0}{3}(MF)_1 \sin\omega t$$

$$f_{21} = \left(\frac{k}{2m}\right)(m)(1)\left(\frac{2P_0}{3k}(MF)_1 \sin\omega t\right) =$$

$$= \frac{P_0}{3}(MF)_1 \sin\omega t$$

$$f_{12} = \left(\frac{2k}{m}\right)(2m)(-1)\left(\frac{-P_a}{6k}(MF)_2 \sin\omega t\right)$$

$$= \frac{2P_a}{3}(MF)_2 \sin\omega t$$

$$f_{22} = \left(\frac{2k}{m}\right)(m)(1)\left(\frac{-P_a}{6k}(MF)_2 \sin\omega t\right)$$

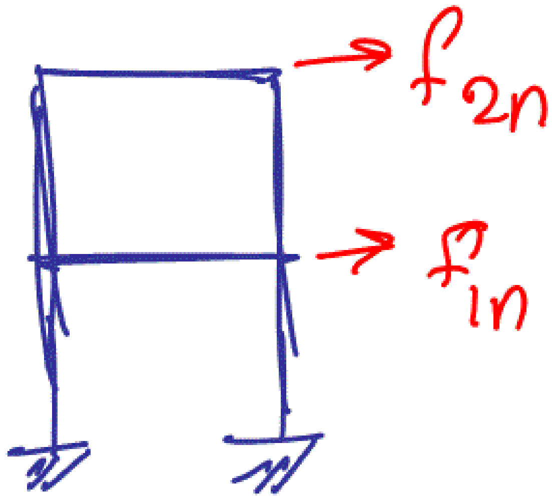
$$= \frac{-P_a}{3}(MF)_2 \sin\omega t$$

$$V_{1n} = f_{1n} + f_{2n}$$

۱۲ ۱۲ ۲۲

$$V_{2n} = f_{2n}$$

2 1 21



$$V_{2n} = f_{2n}$$

$$V_{11} = \frac{2P_0}{3}(MF)_1 \sin\omega t$$

$$V_{12} = \frac{P_0}{3}(MF)_2 \sin\omega t$$

$$V_{21} = \frac{P_0}{3}(MF)_1 \sin\omega t$$

$$V_{22} = -\frac{P_0}{3}(MF)_2 \sin\omega t$$

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{P_0}{3}\left(2\,(MF)_1 + (MF)_2\right)\sin\omega t \\ V_2 = \dfrac{P_0}{3}\left((MF)_1 - (MF)_2\right)\sin\omega t \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$