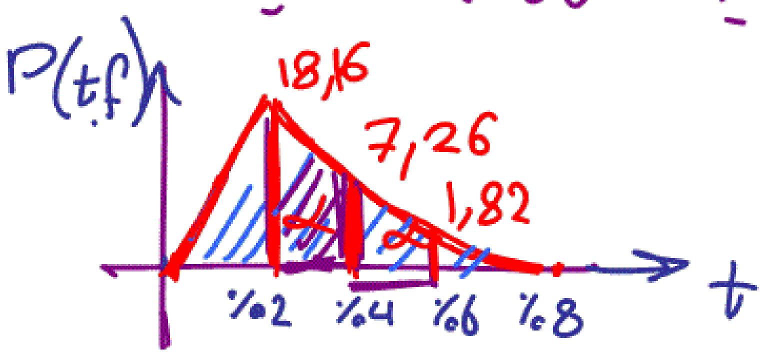
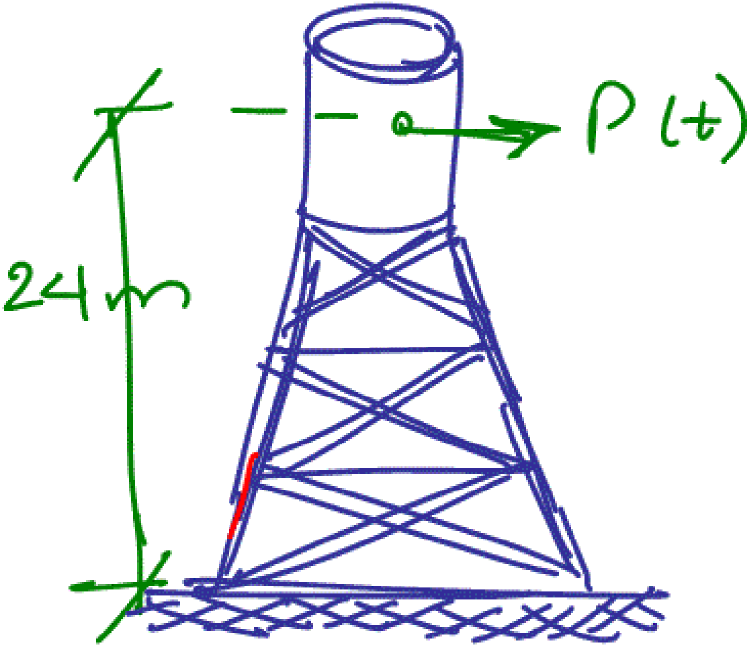
بسم الله الرحمن الرحیم

مثال) یک تانکر آب تحت تحریک P(t) ناشی از انفجار

قرار گرفته حداکثر لنگر خمشی پایه تانکر را بدست آورید .





$m = 45,4 \text{ ton}$

$k = 1,47 \ \dfrac{\text{ton f}}{\text{cm}}$

$\xi = 1,23 \ \%$

$T_n = 1,12 \text{ sec}$

مدت تداوم بار — $\dfrac{t_d}{T_n} = \dfrac{0/08 \text{ s}}{1,12 \text{ s}} = 0/07 < 0/25$

پس می‌توان به صورت ضربه خالص فرض کرد

$$I = \int_0^{0.08} P(t)\,dt \longrightarrow \text{محاسبه سطوح ذوزنقه‌ای}$$

$$= \frac{0.02}{2}\left[0 + 2\,\underbrace{(18.16)} + 2\,\underbrace{(7.26)} + 2\,\underbrace{(1.82)}\right]_{ton}$$

$$= 0.54 \quad t.sec$$

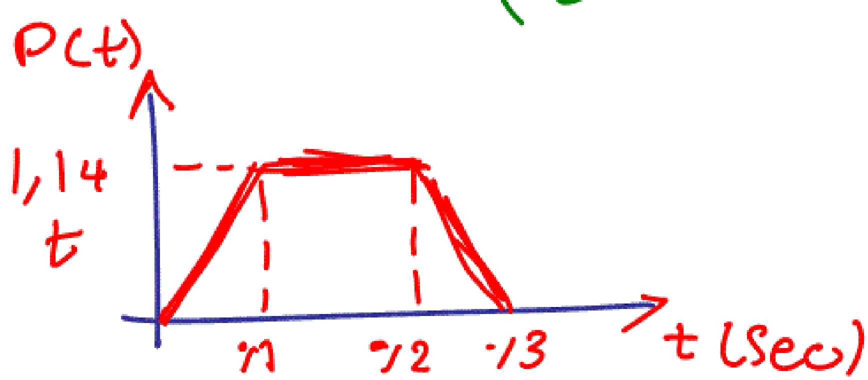
$$U = \frac{I}{m\omega_n} = \frac{I}{k}\,\frac{2\pi}{T_n} = 2.06 \ cm$$

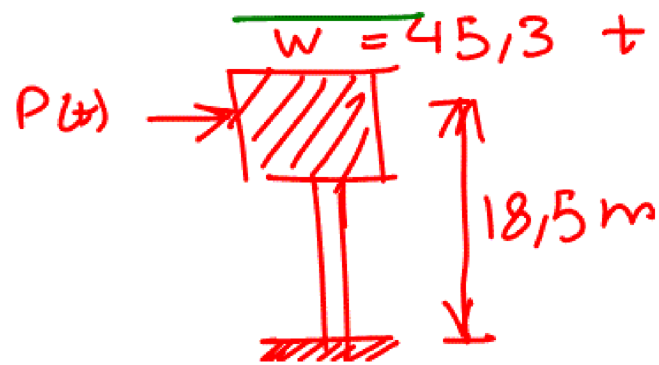
$$f_s = k\,u = 1,47 \times 2,06 = 3,03 \quad tf$$

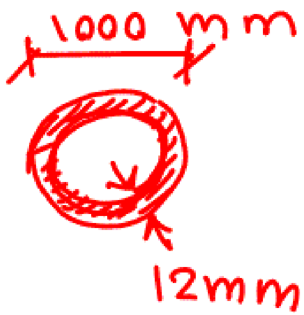
$$M = 3,03 \times 24 = \boxed{72,72 \; t.m}$$

تمرین: مخزن آب شکل زیر را تحت بارگذاری انفجاری نشان داده شده

در شکل زیر تحلیل نمائید ($\xi = \%4$)







سطح مقطع پایه مخزن

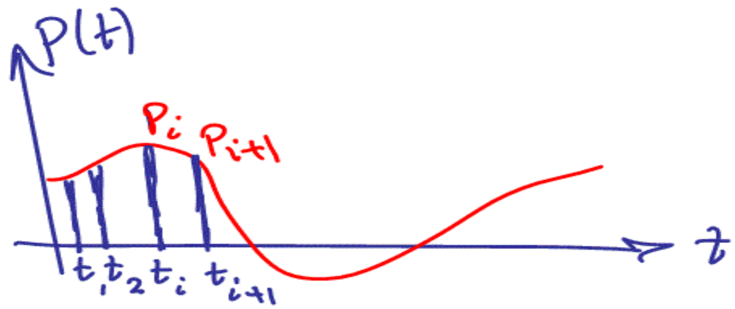
$E = 2{,}1 \times 10^{6}\ kg/cm^2$

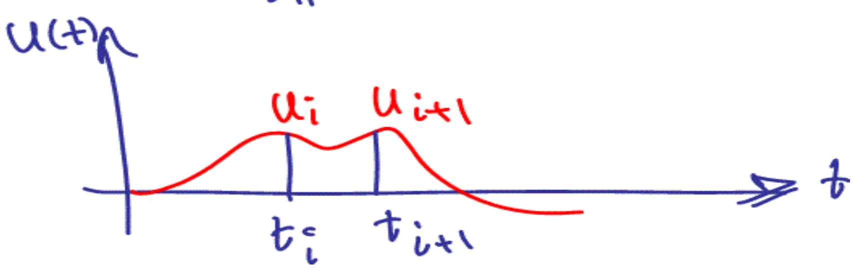
در صورت وجود میرایی، روش تقریبی حل دستگاه‌های یک درجه آزاد
در برابر نیروهای ضربه‌ای کوتاه مدت منجر به رابطه زیر خواهد شد

$$\boxed{u(t) = \left(\frac{\int_0^{t_d} p(t)\,dt}{m\,\omega_d}\right) e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_d t}$$

ارزیابی عددی پاسخ دینامیکی

اگر P (بار دینامیکی) یا $\ddot{u}_g$ (شتاب زمین) تابع دلخواه و پیچیده‌ای باشد یا اینکه سیستم غیرخطی باشد، حل تحلیلی معادله حرکت غیرممکن می‌شود و باید از حل عددی استفاده شود.





time-stepping Method

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + (f_s)_i = P_i$$

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + (f_s)_{i+1} = P_{i+1}$$

دراین روش برمبنای درونیابی خطی نیرو پیش می‌رویم

* رابطه انتگرال دیوهامل:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

باتوجه به روابط مثلثاتی و شرایط اولیه صفر

$$\left(\sin(\omega t-\omega\tau) = \sin\omega t\cos\omega\tau - \cos\omega t\sin\omega\tau\right)$$

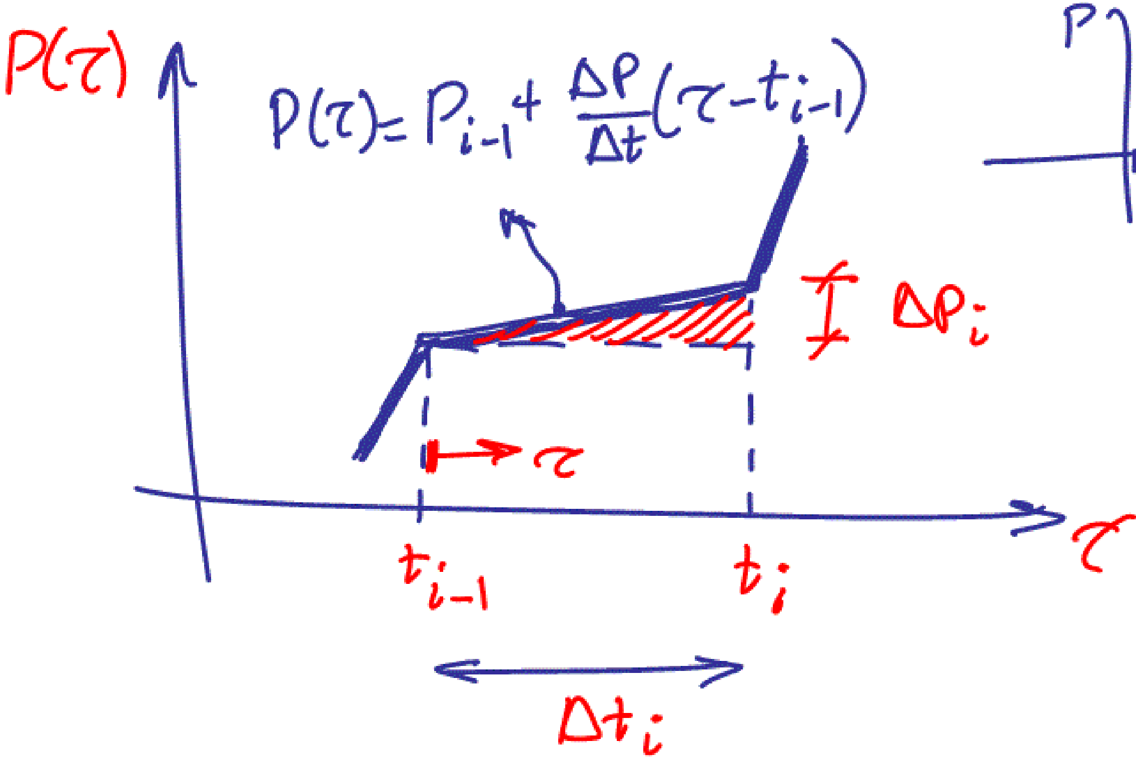
$$u(t) = \sin\omega_n t\,\frac{1}{m\omega_n}\overbrace{\int_0^t P(\tau)\cos\omega_n\tau\,d\tau}^{A} - \cos\omega_n t\,\frac{1}{m\omega_n}\overbrace{\int_0^t P(\tau)\sin\omega_n\tau\,d\tau}^{B}$$

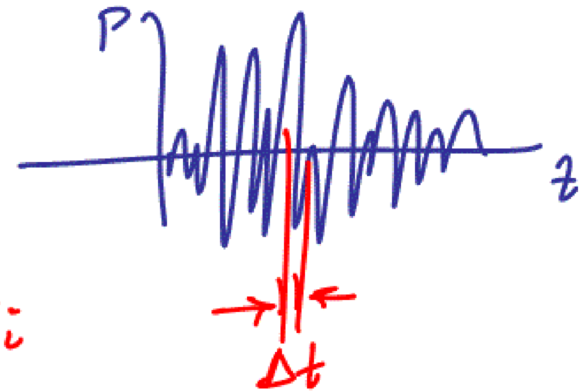
(یا به عبارت)

$$u(t) = \left[A(t) \sin \omega_n t - B(t) \cos \omega_n t \right] / m\omega_n$$

$$\begin{cases} A(t) = \int_0^t p(\tau) \cos \omega_n \tau \, d\tau \\ B(t) = \int_0^t p(\tau) \sin \omega_n \tau \, d\tau \end{cases}$$

بنابراین برای محاسبه انتگرال دیوهامل لازم است انتگرالهای A و B با روش
عددی حل شوند. یکی از بهترین راهها برای حل انتگرالهای فوق آن است که فرض کنیم
بارگذاری سیستم از بهم پیوستن یک سری قسمتهای خطی طبق شکل تشکیل شده است





$$
\begin{cases}
A(t_i) = \int_0^{t_i} P(\tau)\cos\omega_n\tau\, d\tau = \int_0^{t_{i-1}} {}'' \; + \int_{t_{i-1}}^{t_i} {}'' \\
A(t_{i-1}) = \int_0^{t_{i-1}} p(\tau)\cos\omega_n\tau\, d\tau
\end{cases}
$$

اگر از هم کم کنیم

$$A(t_i) - A(t_{i-1}) = \cancel{\int_0^{t_{i-1}} P(\tau)\cos\omega_n\tau\, d\tau} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(\tau)\cos\omega_n\tau\, d\tau$$

$$\cancel{- \int_0^{t_{i-1}} P(\tau)\cos\omega_n\tau\, d\tau}$$

$$\boxed{A(t_i) = A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(\tau)\cos\omega_n\tau\, d\tau}$$

به همین ترتیب

$$\boxed{B(t_i) = B(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(\tau)\sin\omega_n\tau\, d\tau}$$

جایگذاری $P(\tau)$ با توجه به شکل بالا

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ P(t_{i-1}) + \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}(\tau - t_{i-1}) \right\} \cos\omega_n\tau\, d\tau$$

$$= A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ P(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \right\} \cos\omega_n\tau\, d\tau$$

(1) انتگرال معمولی

$$+\int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\tau \cos\omega_n \tau \, d\tau}_{\text{② انتگرال جزء به جزء}}$$

$$\text{①} = \frac{1}{\omega}\left\{ P(t_{i-1} - t_{i-1}\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}) \right\}(\sin\omega_n t_i - \sin\omega_n t_{i-1})$$

$$\text{②} = \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\tau}_{u} \underbrace{\cos\omega_n\tau \, d\tau}_{dv} = \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\left\{ \frac{1}{\omega}\tau \sin\omega_n\tau \right]_{t_{i-1}}^{t_i}$$

$$-\frac{1}{\omega}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin\omega_n\tau \, d\tau$$

$$= \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\left\{ \frac{1}{\omega_n^2}\left[\cos\omega_n \tau\right]_{t_{i-1}}^{t_i} + \frac{1}{\omega_n}\left[\tau \sin\omega_n \tau\right]_{t_{i-1}}^{t_i}\right.$$

$$= \frac{\Delta P_i}{\omega_n^2 \Delta t_i}\left\{\cos\omega_n t_i - \cos\omega_n t_{i-1} + \omega_n\left(t_i \sin\omega_n t_i - t_{i-1}\sin\omega_n t_{i-1}\right)\right\}$$

$$\overbrace{A(t_i) = A(t_{i-1}) + \frac{1}{\omega_n}\left[P(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right]\left(\sin\omega_n t_i - \sin\omega_n t_{i-1}\right) + \frac{\Delta P_i}{\omega_n^2 \Delta t_i}\left[\cos\omega_n t_i - \cos\omega_n t_{i-1} + \omega_n\left(t_i \sin\omega_n t_i - t_{i-1}\sin\omega_n t_{i-1}\right)\right]}$$

و برطبق ترکیب

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \frac{1}{\omega_n}\left[P(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right](\cos\omega_n t_i - \cos\omega_n t_{i-1}) + \frac{\Delta P_i}{\omega_n^2 \Delta t_i}\left[\sin\omega_n t_i - \sin\omega_n t_{i-1} + \omega_n(t_i\cos\omega_n t_i - t_{i-1}\cos\omega_n t_{i-1})\right]$$

$$\boxed{u(t) = \frac{\left[A(t_i)\sin\omega_n t_i - B(t_i)\cos\omega_n t_{i-1}\right]}{m\omega_n}}$$

روش‌های کلاسیک ذوزنقه‌ای و سیمپسون

در این روش‌های کلاسیک همه انتگرال دیوهامل که با روابط مثلثاتی در حالت نامیرا بصورت زیر تعریف شد

$$u(t)=\frac{\sin\omega_n t}{m\omega_n}\int_0^t p(\tau)\cos\omega_n\tau\,d\tau-\frac{\cos\omega_n t}{m\omega_n}\int_0^t p(\tau)\sin\omega_n\tau\,d\tau$$

$$u(t) = A(t)\sin\omega t - B(t)\cos\omega t$$

$$\begin{cases} A(t) = \dfrac{1}{m\omega_n}\displaystyle\int_0^t p(\tau)\cos\omega_n\tau\, d\tau \\ B(t) = \dfrac{1}{m\omega_n}\displaystyle\int_0^t p(\tau)\sin\omega_n\tau\, d\tau \end{cases}$$

نحوه محاسبه $A(t)$ را بررسی می‌کنیم

اگر فاصله زمانی $\Delta\tau$ کوچک باشد مقدار انتگرال با تبدیل به صورت
جمع یک سری جملات تقریبی به شکل زیر نوشته می‌شود

$$A(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t p(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$$

$$\begin{cases} \text{ذوزنقه‌ای} = \dfrac{\Delta\tau}{m\omega_n}\dfrac{1}{2}\sum(t) \\ \text{سیمپسون} = \dfrac{\Delta\tau}{m\omega_n}\dfrac{1}{3}\sum(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{در ذوزنقه‌ای} \rightarrow \sum(t) = y_0+2y_1+2y_2+\cdots\ 2y_{n-1}+y_n \\ \text{در سیمپسون} \rightarrow \sum(t) = y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+4y_{n-1}+y_n \end{cases}$$

N باید زوج باشد $\rightarrow t/\Delta\tau$

با توجه به لحاظ کردن تاریخچه جواب

گام دوم $\rightarrow \sum(t) = \sum(t-\Delta t) + \{ P(t-\Delta\tau)\cos\omega(t-\Delta\tau) + P(t)\cos\omega t$

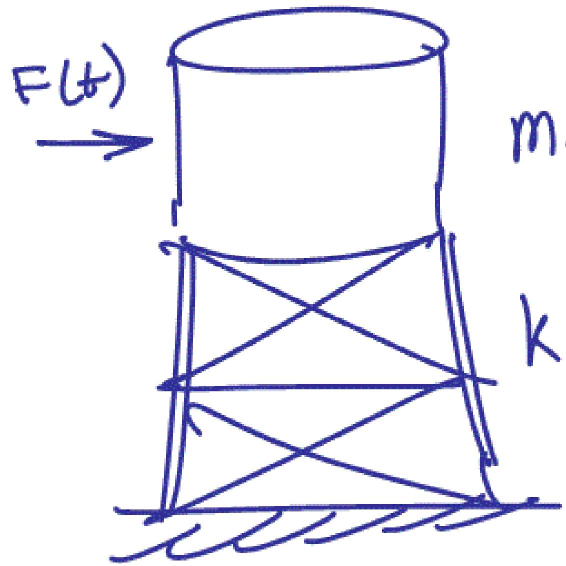
گام سوم $\rightarrow \sum(t) = \sum(t-2\Delta t) + [P(t-2\Delta\tau)\cos\omega(t-2\Delta\tau) +$

$4P(t-\Delta\tau)\cos\omega(t-\Delta\tau) + P(t)\cos\omega t]$

$$u(t) = \frac{\Delta\tau}{m\omega} = \frac{1}{2}\left[\overset{A}{\overline{\sum}}(t)\sin\omega t - \overset{B}{\overline{\sum}}(t)\cos\omega t\right]$$

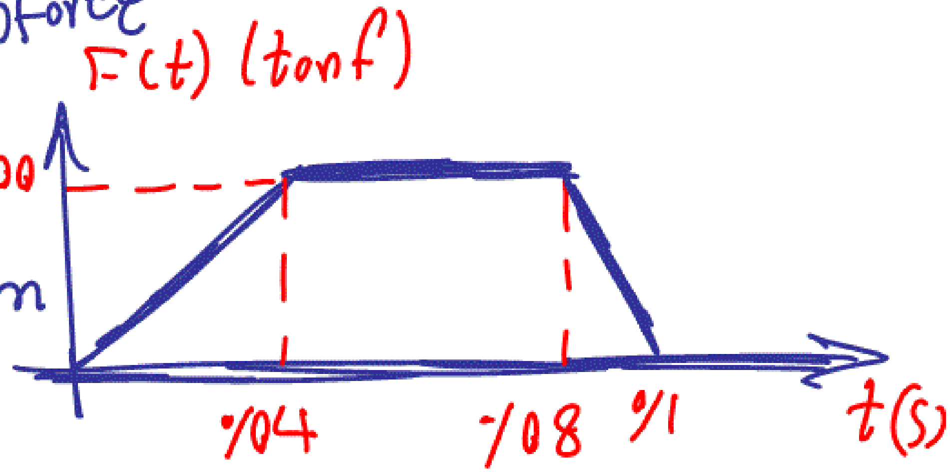
$$\frac{1}{3}$$

تمرین



$m = 30$ tonforce

$k = 2$ tf/cm



← پاسخ سازه بالا را به نیروی دینامیکی نشان داده شده با صرف نظر کردن از میرایی موجود بدست آورید

- با روش عددی با گام‌های زمانی (S) ۰/۰۱ و (S) ۰/۰۰۱ پاسخ را بعد از ۱ و 2 ثانیه بدست آورید و پاسخ‌ها را مقایسه کنید

- با روش تحلیلی (انتگرال‌گیری مستقیم) پاسخ‌ها را بدست آورید

- نمودارهای پاسخ را ترسیم نمایید.

تمرین

قاب فلزی شکل زیر یک ماشین دوار را نگه داشته است

این ماشین دوار نیروی افقی موازی در سطح بالایی معادل

$(P(t) = 100 \sin 6{,}5\, t)$ پوند به قاب وارد می کند با فرض

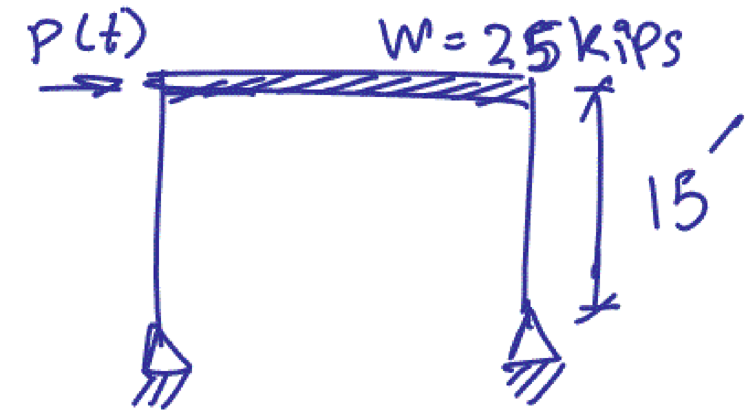
5% میرایی مطلوب است

a) دامنه پاسخ پایدار ارتعاشی سیستم

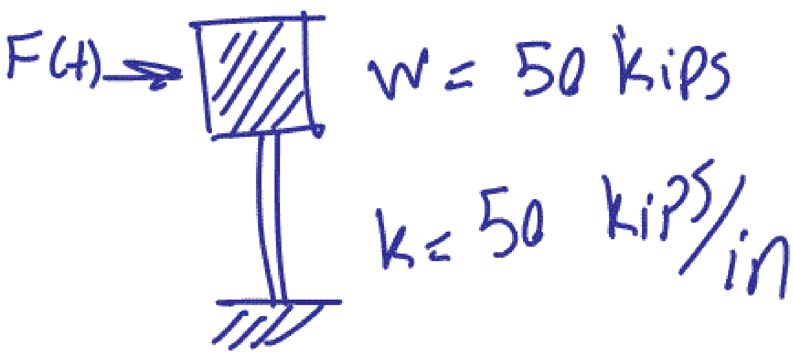
b) برش ماکزیمم در ستونها

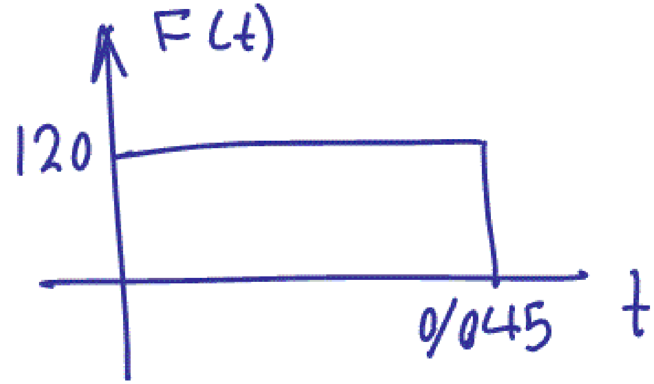
c) پاسخ را رسم نمایید

$$\begin{cases} E = 30\times10^{6}\ Psi \rightarrow lb/in^2 \\ I = 69{,}2\ in^4 \end{cases}$$



تمرین: جابجایی و سرعت مخزن آب را پس از گذشت 0/5 (s) بدست آورید



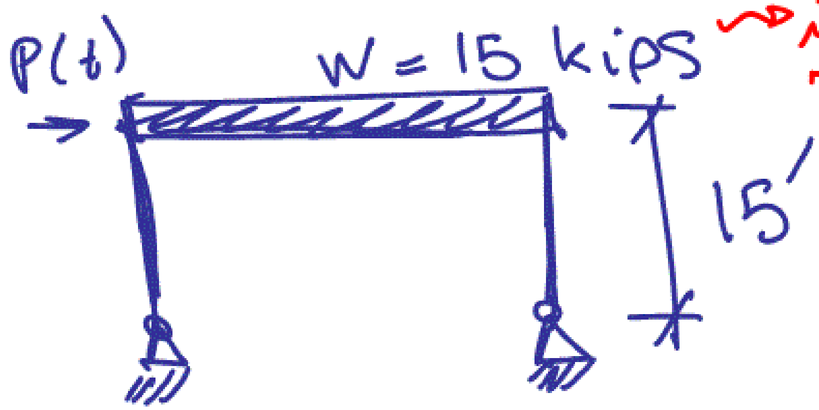


مثال

قاب فلزی شکل زیر یک ماشین دوار را نگه داشته است

این ماشین دوار نیروی افقی معادل در سطح بالایی معادل

$P(t) = 200 \sin \overset{\omega}{5.3}\, t$



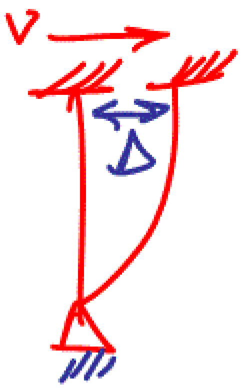
پوند به قاب وارد می‌کند با فرض

5% میرایی مطلوب است

a) دامنه پاسخ پایدار سیستم؟

b) برش ماکزیمم وارده به ستونها؟

$$\begin{cases} E = 30\times10^6 \ \text{psi} \longrightarrow \text{lb}/\text{in}^2 \\ I = 69{,}2 \ \text{in}^4 \end{cases}$$



$$k = \frac{3EI}{\ell^3}$$

$$k = 2\left[\frac{3EI}{\ell^3}\right] = \frac{2\times3\times30\times10^6\times69{,}2}{(15\times12)^3} = 2136 \ \text{lb}/\text{in}$$

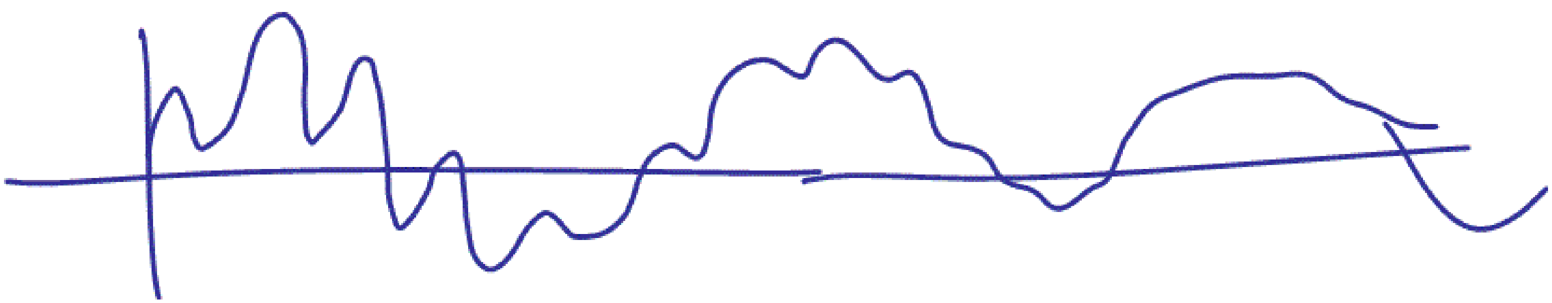
$$\xi = \%5$$

$$(u_{st})_0 = \frac{P_0}{k} = \frac{200}{2136} = \%0936 \ \text{in}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{W/g}} = \sqrt{\frac{2136 \times 32,2 \times 12}{15000}} = 7,41 \ \text{rad/s}$$

$$g = 32,2 \ \text{ft/s}^2$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{5,3}{7,41} = 0,715$$



○ دامنه پاسخ پایدار

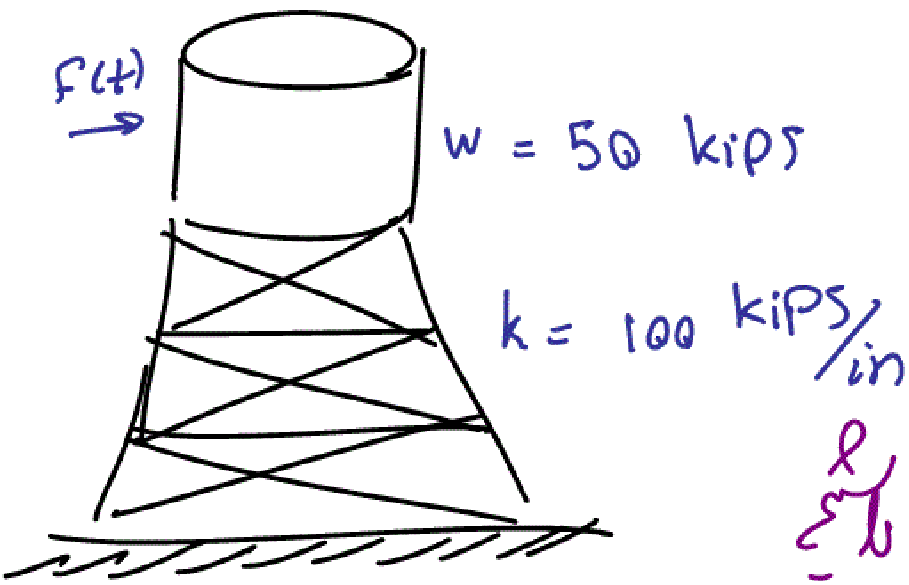
$$\boxed{U = \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} = \frac{0.936}{\sqrt{(1-(0.715)^2)^2+(2\times0.05\times0.715)^2}} = 0.189\ in}$$

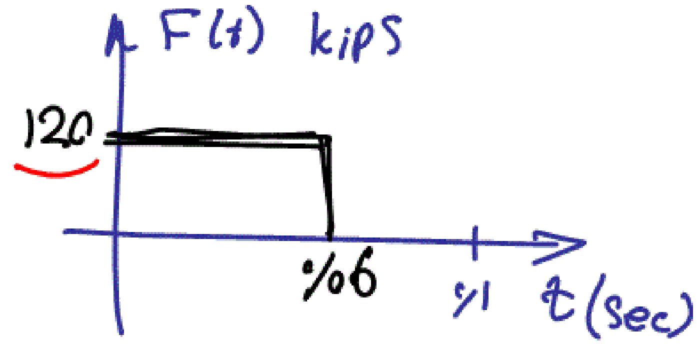
(b)

$$V_{MAX} = k\,\Delta_{MAX}$$

$$V_{MAX} = \frac{2136}{2}\times 0.189 = \boxed{201.8\ lb}$$

مثال) جابجایی و سرعت مخزن آب را پس از گذشت 1 s و ۰/۱ بدست آورید





با توجه به روابطی که برای نیروی مستطیلی داشتیم

در قسمت forced vibration : I

$$u(t) = (u_{st})_0 (1 - \cos \omega_n t) = \frac{P_0}{k}\left[1 - \cos \omega_n t\right]$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100 \times 32{,}2 \times 12}{50}} = 27{,}8 \ \text{rad/s}$$

$$\begin{cases} u(0{,}6) = \overbrace{1{,}2}^{P_0/k}\left[1 - \cos(27{,}8 \times 0{,}6)\right] = 1{,}32 \ \text{in} \\ \dot{u}(0{,}6) = \frac{P_0 \omega_n}{k} \sin \omega_n t = 33{,}2 \ \text{in/s} \end{cases}$$

مقادیر اولیه برای مرحله بعد

* از روابط بار مستطیلی مورد بحث قرار گرفته بود از بحث مربوط به نیروی دلخواه

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t \underbrace{F(\tau)}_{120} \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{120}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-\tau)\right]_0^t$$

$$= \frac{120}{m\omega_n^2}\left[1-\cos\omega_n t\right]$$

k

ⓑ Free vibration (II)

$$u(t) = u(t_d)\cos\omega_n(t-t_d) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_d)$$

$$u(t) = 1{,}32\cos 27{,}8(t-\cancel{t_d}) + \frac{33{,}2}{27{,}8}\sin 27{,}8(t-\cancel{t_d})$$

$0{,}4$ $\quad$ $0{,}4$

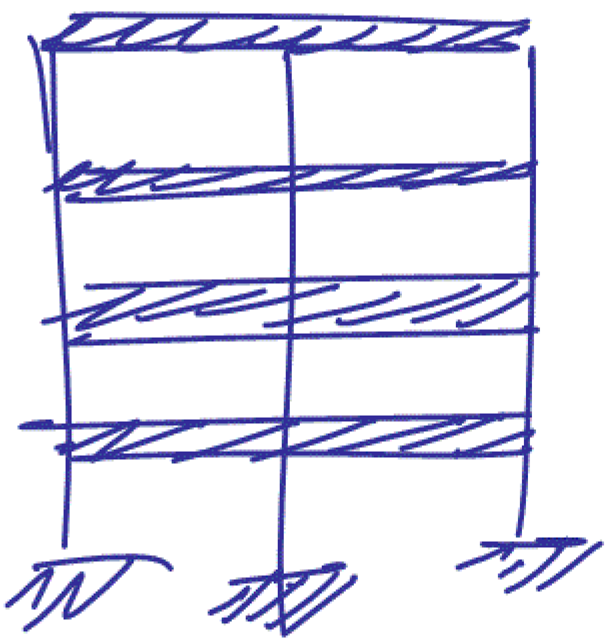
$$u(0{,}1) = \boxed{1{,}66\ \text{in}}$$

$$\dot{u}(t) = -(1.32 \times 27.8) \sin 27.8(0.4) + 33.2 \cos(27.8 \times 0.4)$$

$$\dot{u}(0.1) = \boxed{-18.2 \ \text{in/s}}$$

سیستم های چند درجه آزادی (MDOF)

سازه ها را همیشه نمی توان بصورت یک درجه آزاد مدل کرد در واقع سازه ها سیستمهای پیوسته ای هستند که بی نهایت درجه آزادی دارند و مدل کردن آنها بصورت چند درجه آزادی امکان وسیع تری را در اختیار ما قرار می دهد



∞ درجه آزادی دینامیکی ←

≡

4 درجه آزادی دینامیکی
در مدل "ساختمان برشی"

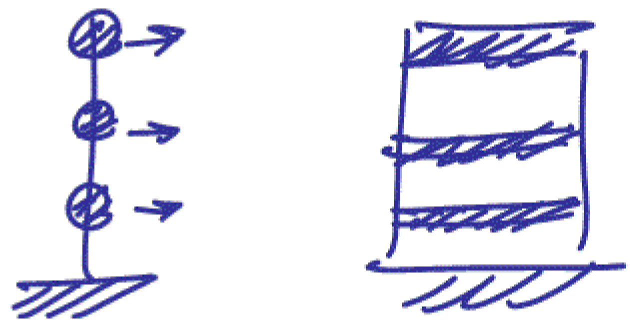
یک ساختمان برشی چندطبقه بدین صورت تعریف می‌شود:

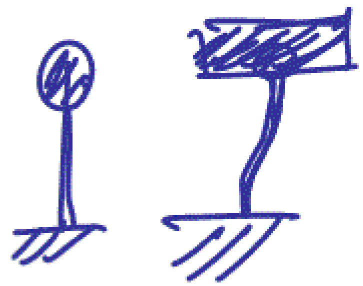
— کل جرم سازه در تراز طبقات متمرکز شده است

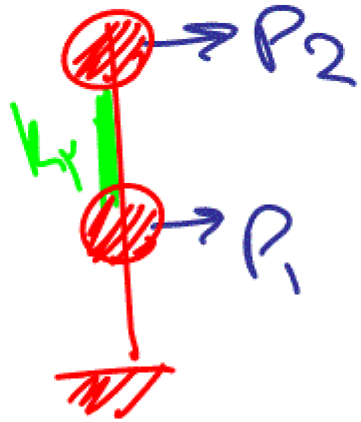
(تبدیل سازه از بی‌نهایت درجه آزادی به چند درجه آزادی متمرکز در طبقات)

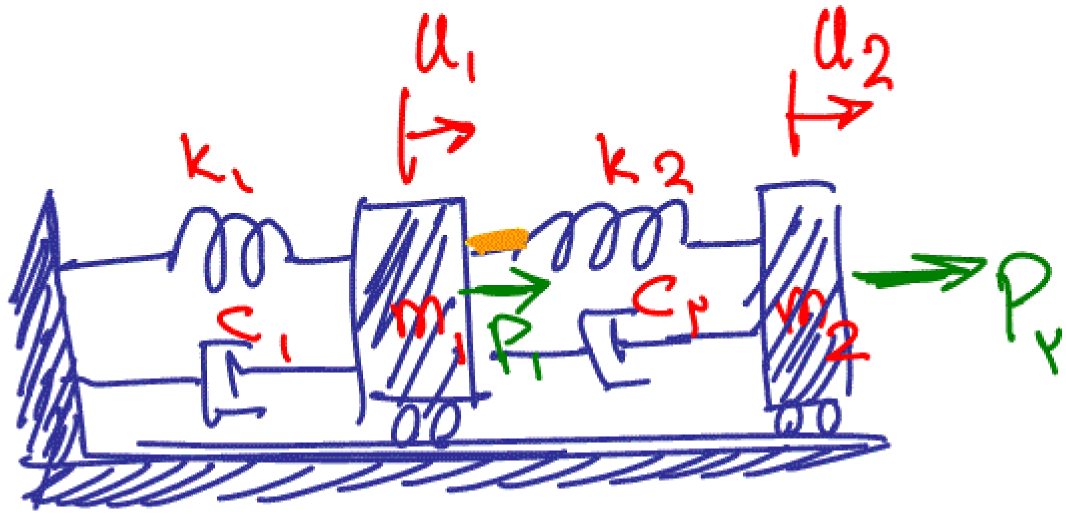
- کف‌ها در مقایسه با ستون‌ها بی‌نهایت صلب هستند
(محل اتصال کف‌ها و اعضای قائم تغییر زاویه ندارند)

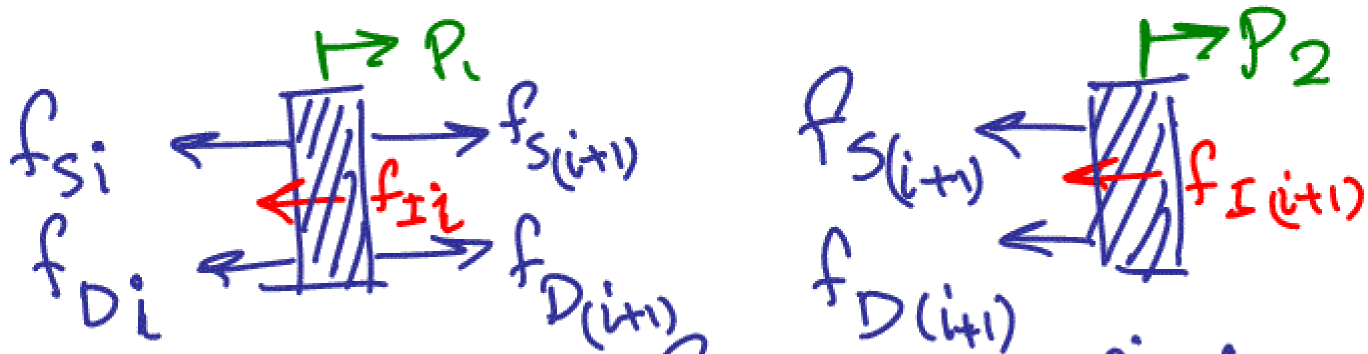
- تغییر شکل سازه مستقل از نیروهای محوری بوجود آمده در ستون‌ها است
و کف‌های صلب در هنگام حرکت بصورت افقی باقی می‌مانند






P2
k۲
P1


u1
u2
k1
k2
c1
c۲
m1
m2
P1
P۲



زیرنویس i نشان دهنده درجه آزادی i ام است

$$f_{S_1} = k_1 u_1$$

$$f_{D_1} = c_1 \dot{u}_1$$

$$f_{S_2} = k_2 (u_2 - u_1)$$

$$f_{D_2} = c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + [k_1u_1 - k_2(u_2-u_1)] + [c_1\dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1)] = P_1 \\ m_2\ddot{u}_2 + k_2(u_2-u_1) + c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1) = P_2 \end{cases}$$

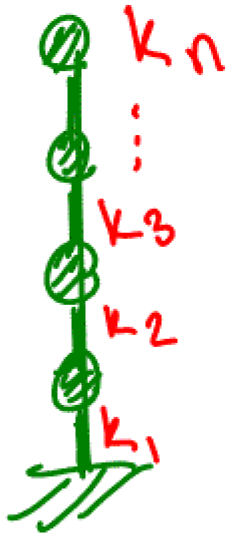
$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + (c_1+c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 + (k_1+k_2)u_1 - k_2u_2 = P_1 \\ m_2\ddot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 + c_2\dot{u}_2 - k_2u_1 + k_2u_2 = P_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\text{mü} + \text{çu̇tku} = P}$$

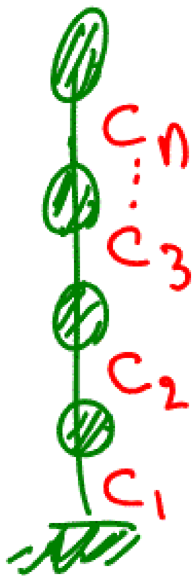
$$\boxed{[\grave{m}]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{P\}}$$

([illegible]) ([illegible]) ([illegible])



$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & \vdots \\ \vdots & & k_{ij} & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

درایه (k_{ij}) از ماتریس سختی نشانگر نیروی لازم در گره i به ازای تغییر مکان واحد در گره j است درحالی که بقیه تغییر مکان‌ها صفر باشد



$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & \vdots \\ \vdots & & c_{ij} & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

* درایه (c_{ij}) از ماتریس میرایی، نیروی بوجود آمده در درجه آزادی i با اعمال سرعت واحد در درجه آزادی j

در سازه‌ی چند درجه آزاد

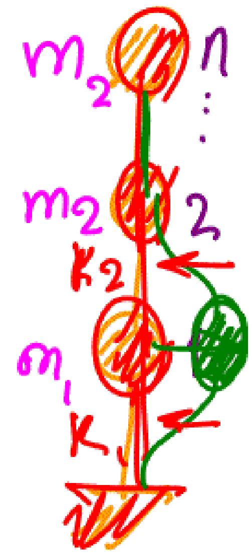
$$
\begin{cases}
\{f_s\} = [k]\{u\} \\
\underline{\{f_D\}} = \underline{[c]}\{\dot{u}\} \xrightarrow{\quad} \xi_c \\
\{f_I\} = [m]\{\ddot{u}\}
\end{cases}
$$

$$\left\{\begin{aligned} f_{s_1} &= k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + \cdots + k_{1n}u_n \\ f_{s_2} &= k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + \cdots + k_{2n}u_n \\ &\vdots \\ f_{s_n} &= k_{n1}u_1 + \cdots + k_{nn}u_n \end{aligned}\right.$$

$$\{f_s\} = [k]\{u\}$$

برای سازه برشی الگوی ماتریس سختی بصورت زیر (3 طبقه‌ای و متقارن) است:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -k_4 & \ddots & \ddots & -k_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -k_n & k_n \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

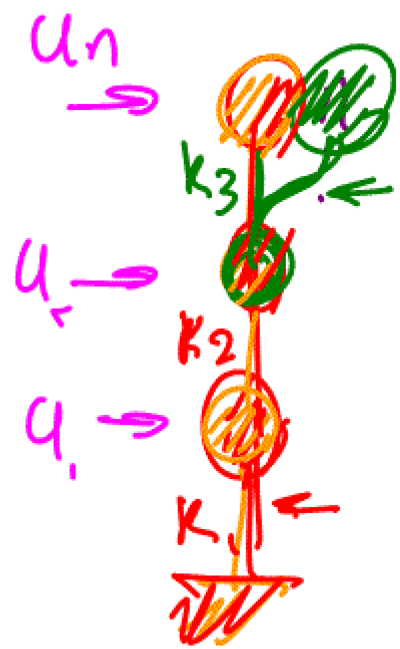


k_{ij}

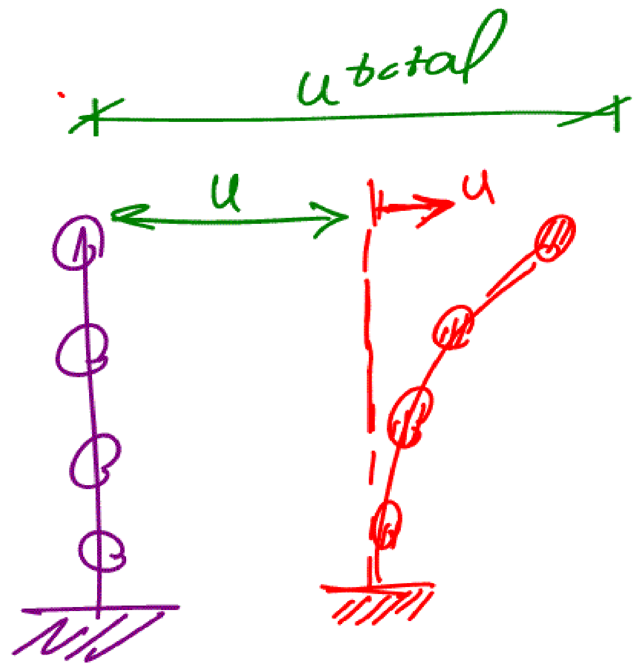
$k_{23} = -k_3$

$k_{33} = k_3$

$k_{13} = 0$



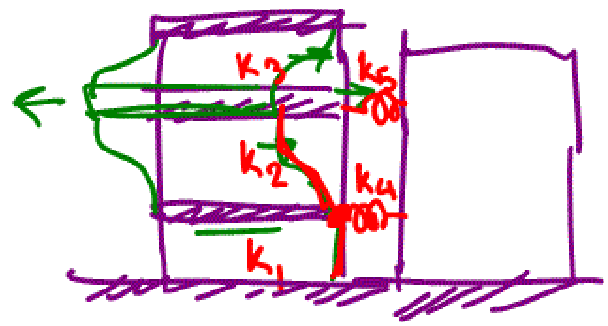
سازه چند درجه آزاد تحت تحریک پایه



$$u^t = u + u_g$$

$$\underbrace{[m]\{\ddot{u}^t\}}_{[m]\{\{\ddot{u}\}+\{\ddot{u}_g\}\}} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = 0$$

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = -[m]\{1\}\ddot{u}_g$$



$k_1+k_2+k_4$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

k_2

211 — 1

سازه‌های چند درجه آزاد بدون میرایی در حالت ارتعاش آزاد

که حل معادله دیفرانسیل به روش مد ترکیبی است

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}_{N\times 1}$$

شرایط اولیه : $\{u(0)\}$ و $\{\dot{u}(0)\}$

پاسخ معادله دیفرانسیل $\longrightarrow$ $\{u(t)\} = q_n \{\varphi_n\}$

مختصه زمانی

تابع شکل

211 - 2

$$q_n = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

A_n و B_n ثابت‌های انتگرال‌گیری و وابسته به شرایط اولیه‌اند

$$u(t) = \varphi_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

که در آن (φ_n) و (ω_n) مجهولند. با قرار دادن $u(t)$ و $\ddot{u}(t)$
در رابطه اول و حذف عبارت سینوسی داریم:

$$-\omega^2 [M]\{\varphi\} + [K]\{\varphi_n\} = \{0\}$$

معادله بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\left([K] - \omega_n^2 [M]\right)\{\varphi\} = \{0\}}$$

211 - 3

مسأله مقادیر ویژه ماتریسی (eigen-value Problem)
نام دارد و برای اینکه این معادله به اصطلاح با شد :
اگر $\{q\}=\{0\}$ باشد به منزله عدم وجود ارتعاش است
و حل غیر مفید خواهد بود ولی اگر :

$$\boxed{\det\left[[k]-\omega_n^2[m]\right]=0}$$

معادله قبل درست خواهد بود و این رابطه معروف به معادله مشخصه

211-4

یا رابطه مشخصه یا معادله فرکانس است که حاصل آن یک

چندجمله‌ای درجه n است

در معادله بالا $\left\{ \begin{array}{l} \omega_n \leftarrow \text{فرکانس‌های طبیعی سازه} \\ \varphi_n \leftarrow \text{مودهای ارتعاشی طبیعی} \end{array} \right.$

به تعداد درجات آزادی سازه (بعد ماتریس جرم و سختی و میرایی)

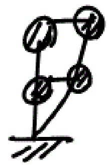
توان‌ها و بیان‌های (ω_i) داریم به طوری که:

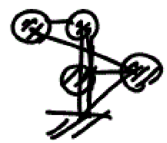
$$(\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_n)$$

و باید توجه کرد که مقادیر $\{\varphi_n\}$ مقادیر نسبی دامنه‌های ارتعاشی است

211 − 5

نه مقادیر مطلق آنها ولی این مقادیر نسبی شکل مودهای ارتعاشی سازه را بدست می دهد

 $\leftarrow \{\varphi_1\}$

 $\leftarrow \{\varphi_2\}$

$$\text{Modal Matrix } [\varphi] = \Big[\{\varphi_1\}\ \{\varphi_2\}\ \cdots\ \{\varphi_n\}\Big]_{N\times N}$$

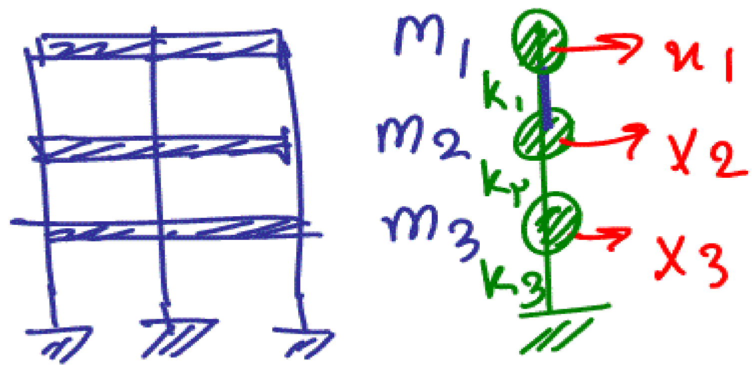
$$\text{Spectral Matrix } [\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \omega_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

در دینامیک سازه کوچکترین تواتر زاویه ای یک سیستم چند درجه آزادی یعنی ω_1 را فرکانس اول (فرکانس اساسی سیستم) می نامیم

مثال :

یک ساختمان برشی ۳ طبقه را بصورت زیر در نظر گرفته، فرکانسهای ارتعاش آزاد آن را بدست آورید

مودهای ارتعاشی را نیز رسم کنید.



$m_1 = 1$ kips-s²/in

$k_1 = 600$ kips/in

$m_2 = 1.5$

$k_2 = 1200$

$m_3 = 2$

$k_3 = 1800$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

معادله مقادیر مشخصه

$$\left([k]-\omega^2[M]\right)\{\varphi\}=\{0\}$$

$$\left(\begin{bmatrix}600 & -600 & 0\\ -600 & 1800 & -1200\\ 0 & -1200 & 3000\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\right)\{\varphi\}=\{0\}$$

دترمینان ماتریس ضرایب را برابر صفر قرار می‌دهیم ↓

(از 600 فاکتور)

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2}{600} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\frac{\omega^2}{600} = B \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1-B & -1 & 0 \\ -1 & 3-1{,}5B & -۲ \\ 0 & -۲ & 5-۲b \end{vmatrix} = 0$$

$$3B^3 - 16{,}5\,B^2 + 22{,}5\,B - 6 = 0$$

$$\begin{cases} B_1 = 0/352 \\ B_2 = 1/607 \\ B_3 = 3/542 \end{cases} \Rightarrow \quad B = \frac{\omega^2}{600}$$

مهمترین ω در اکثر سازه‌ها $\leftarrow$
$$\begin{cases} \omega_1 = 14/52 \ \text{rad/s} \\ \omega_2 = 31/05 \\ \omega_3 = 46/05 \end{cases}$$

جایگذاری ωها در معادله قبل

$$\begin{bmatrix} 1-B & -1 & 0 \\ -1 & 3-1/5B & -2 \\ 0 & -2 & 5-2B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$B_1 = /352$$

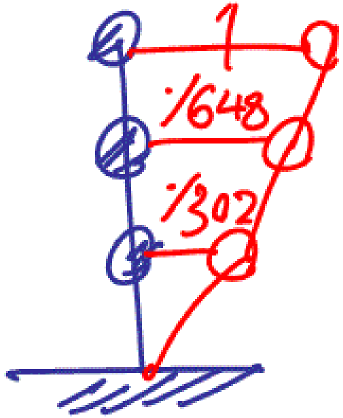
$$\begin{cases} /648\,\varphi_{11} - \varphi_{12} = 0 \\ -\varphi_{11} + 2{,}473\,\varphi_{12} - \varphi_{13} = 0 \\ -2\,\varphi_{12} + 4{,}297\,\varphi_{13} = 0 \end{cases}$$

معمولاً φ_{11} را فرض می کنند و $(n-1)$ تای باقی مانده را بر حسب اولی حساب می کنند.

$$\boxed{\varphi_{11} = 1}$$

$$\varphi_{12} = \boxed{/648\,\varphi_{11}}$$

$$\varphi_{13} = \frac{2}{4{,}297}\varphi_{12} = \frac{2(/648)}{4{,}297}\varphi_{11} = \boxed{/302\,\varphi_{11}}$$



به عنوان تمرین شکل مودهای 2 و 3 را رسم کنید

رابطه تعامد مودهای ارتعاشی

مودهای ارتعاشی سیستم‌های چند درجه آزاد از نقطه نظر روابط ریاضی دارای خواص مهمی می‌باشند که مهمترین آنها رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس جرم

و سختی است که دارای کاربرد اساسی در روش آنالیز مودال خواهد بود

$$\boxed{\left([k]-\omega_n^2[m]\right)\{\varphi\}=\{0\}}$$

برای مود r ام $\rightarrow [k]\{\varphi_r\}-\omega_r^2[m]\{\varphi_r\}=\{0\}$ ضرب در $\{\varphi_s\}^T$

برای مود s ام $\rightarrow [k]\{\varphi_s\}-\omega_s^2[m]\{\varphi_s\}=\{0\}$ ضرب در $\{\varphi_r\}^T$

مود r $\rightarrow \{\varphi_s\}^T[k]\{\varphi_r\}-\omega_r^2\{\varphi_s\}^T[m]\{\varphi_r\}=0$ (1)

مود s $\rightarrow \{\varphi_r\}^T[k]\{\varphi_s\}-\omega_s^2\{\varphi_r\}^T[m]\{\varphi_s\}=0$ (2)

چون ماتریسهای جرم و سختی متقارن هستند به طرفین می توانیم کل رابطه را ترنسپوز کنیم: (اگر دو طرف را ترنسپوز کنیم داریم)

$$\{\varphi_s\}^T[k]\{\varphi_r\}-\omega_s^2\{\varphi_s\}^T[m]\{\varphi_r\}=0 \qquad (3)$$

اگر رابطه (3) را از (1) کم کنیم:

$$\{\omega_s^2-\omega_r^2\}\{\varphi_s\}^T[m]\{\varphi_r\}=0$$

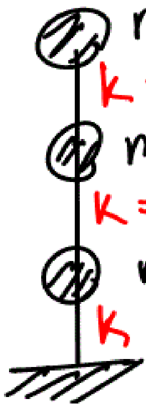
ω ها متفاوت و متمایز

این قسمت صفر نیست

$$\Rightarrow \boxed{\{\varphi_s\}^T[m]\{\varphi_r\} = 0}$$

این رابطه را تعامد مودهای ارتعاشی نسبت به ماتریس جرم می نامند که با وارد کردن آن در رابطه (1) رابطه تعامد نسبت به ماتریس سختی بدست می آید.

$$\boxed{\{\varphi_s\}^T[k]\{\varphi_r\} = 0}$$



جرم

$m = 3 \ \text{kips-s}^2/\text{in}$

$k = 2000 \ \text{kips/in}$

$m = 4$ 〃

$k = 2100$

$m = 5$ 〃

$k = 2500$

$\{\omega\}$ و $\{\varphi\}$

تمرین