ادامه نکات

استهلاک ارتعاش (کاهش لگاریتمی):

نسبت تغییر مکان در زمان $(t)$ و زمان $(t+T_D)$ یعنی فاصله یک ارتعاش کامل را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = e^{\xi \omega_n T_D} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\left( \frac{u_i}{u_{i+1}} = e^{\frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right)$$

لگاریتم طبیعی نسبت $\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right)$

کاهش لگاریتمی نامیده می‌شود $(\delta)$

$$\boxed{\delta = \ln \frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

درمورد $\zeta$ های کوچک

$$\sqrt{1-\zeta^2} = 1$$

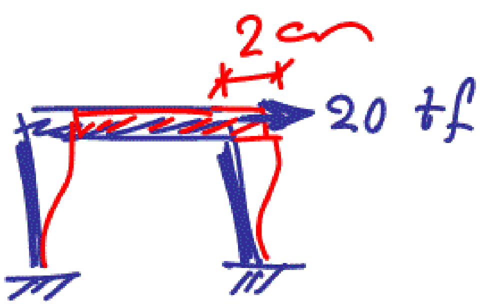
$$\Rightarrow \boxed{\delta = 2\pi \zeta}$$

$$\ln\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right) = 2\pi\xi \Rightarrow \boxed{\ln\frac{u_i}{u_{i+n}} = 2\pi n\xi}$$

مثال : سازه زیر تحت نیروی 20 tf به اندازه 2 سانتیمتر جابجا می‌شود

بعد از 5 سیکل ارتعاش آزاد در زمان t=6 sec جابجایی آن 0.8cm می‌باشد

مطلوب است T و m و $\xi$




$$k = \frac{12EI}{h^3}$$

$$T_D = \frac{6\,sec}{5} = 1.2\,sec$$

بفرض $\xi \ll 1 \rightarrow T \simeq T_D = 1.2\,sec$

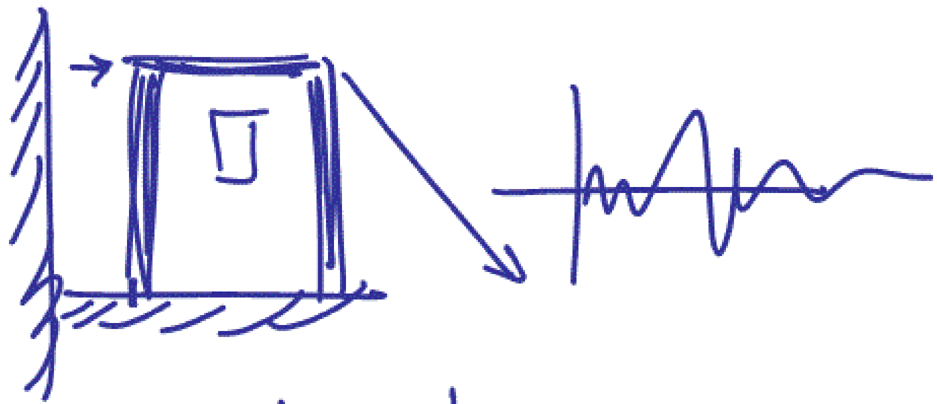
$$k = \frac{20}{2} = 10 \times 10^3 \times 10^3 \ \mathrm{N/m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \begin{matrix} m \rightsquigarrow \mathrm{kg} \\ k \rightsquigarrow \mathrm{N/m} \end{matrix}$$

$$\boxed{m = 357{,}825 \ \mathrm{ton}}$$

$$\boxed{\ln \frac{2}{1.8}} = 2\pi \times 5 \times \zeta$$

$$\boxed{\zeta = \%.3} \ll 1$$

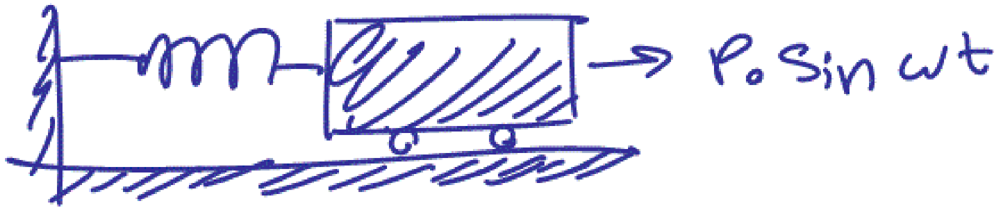


health monitoring

پاسخ سیستم یک درجه آزاد نامیرا تحت اثر نیروهای دینامیکی هارمونیکی

Forced vibration

$$m\ddot{u} + ku = P_0 \sin\omega t$$




حل معادله

جواب عمومی $\quad u_c = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t \quad$ جواب گذرا

جواب خصوصی $\quad u_p = D\sin\omega t \quad$ جواب ماندگار (پایدار)

با قرار دادن این رابطه و مشتق دوم آن در رابطه اصلی داریم:

$$-m\omega^2 D\sin\omega t + kD\sin\omega t = P_o\sin\omega t$$

$$(-m\omega^2 + k)\, D\sin\omega t = P_o\sin\omega t$$

$$D\left(-\frac{m}{k}\omega^2+1\right)=\frac{P_0}{k}$$

$$D=\frac{P_0/k}{-\frac{m}{k}\omega^2+1}$$

* تعریف می‌کنیم : نسبت فرکانسها

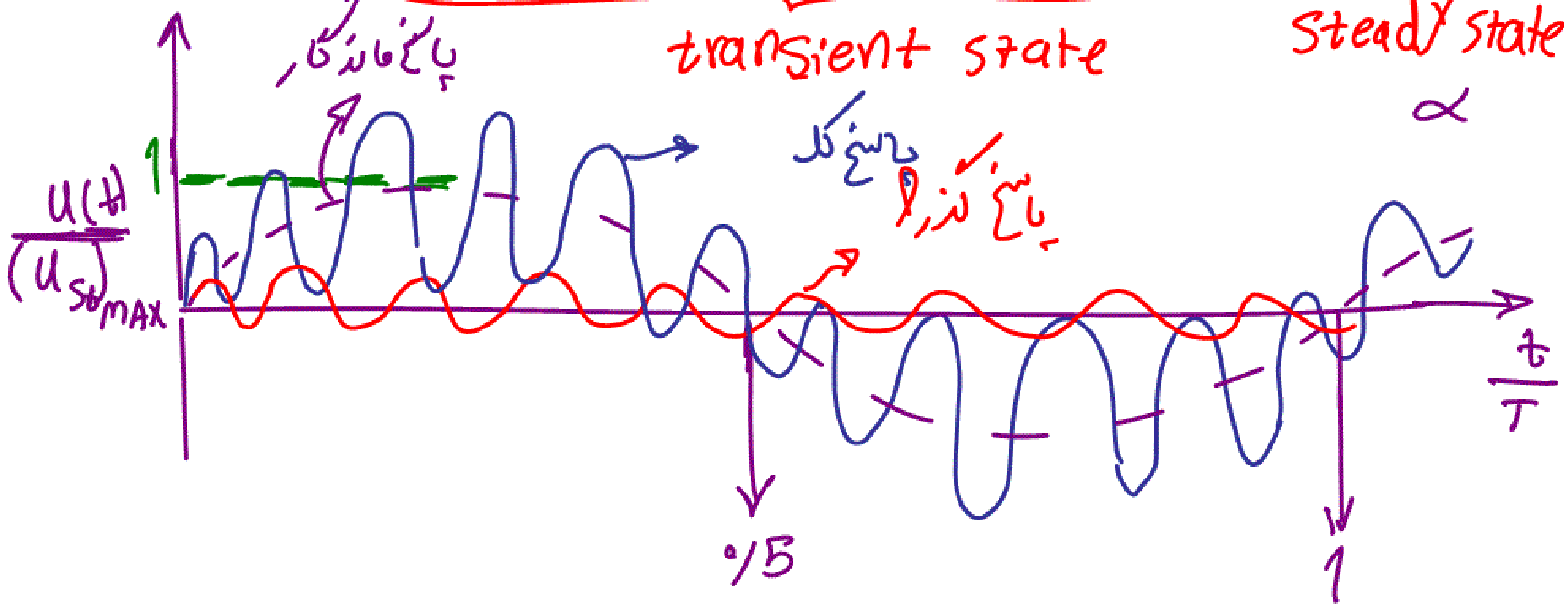
Frequency ratio

$$\boxed{\beta=\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\boxed{u_p=\frac{P_0/k}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t}$$

و با اعمال شرایط اولیه و جمع بندی پاسخها :

$$\boxed{u} = u_c + u_p = \underbrace{u_0 \cos \omega_n t + \left[\frac{\dot{u}_0}{\omega_n} - \frac{P_0}{k}\,\frac{\omega/\omega_n}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right] \sin \omega_n t}_{\text{transient state}} + \underbrace{\frac{P_0}{k}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \omega t}_{\text{steady state}}$$




رسم پاسخ با فرض $(\beta = 0/2)$ و $(u_0 = 0)$ و $\left(\dot{u}_0 = \omega_n \frac{P_0}{k}\right)$

پاسخ عمومی در واقع پاسخ ارتعاش آزاد دستگاه است

static deformation

با حذف جمله شامل شتاب از معادله اصلی

$$\cancel{m\ddot{u}}+ku = P_0 \sin\omega t$$

$$u = \frac{P_0}{k}\sin\omega t$$

$$u_{st}(t) = \frac{P_0}{k}\sin\omega t$$

$$(u_{st})_{MAX} = \frac{P_0}{k}$$

$$(u_{st})_0 = (u_{st})_{MAX}$$

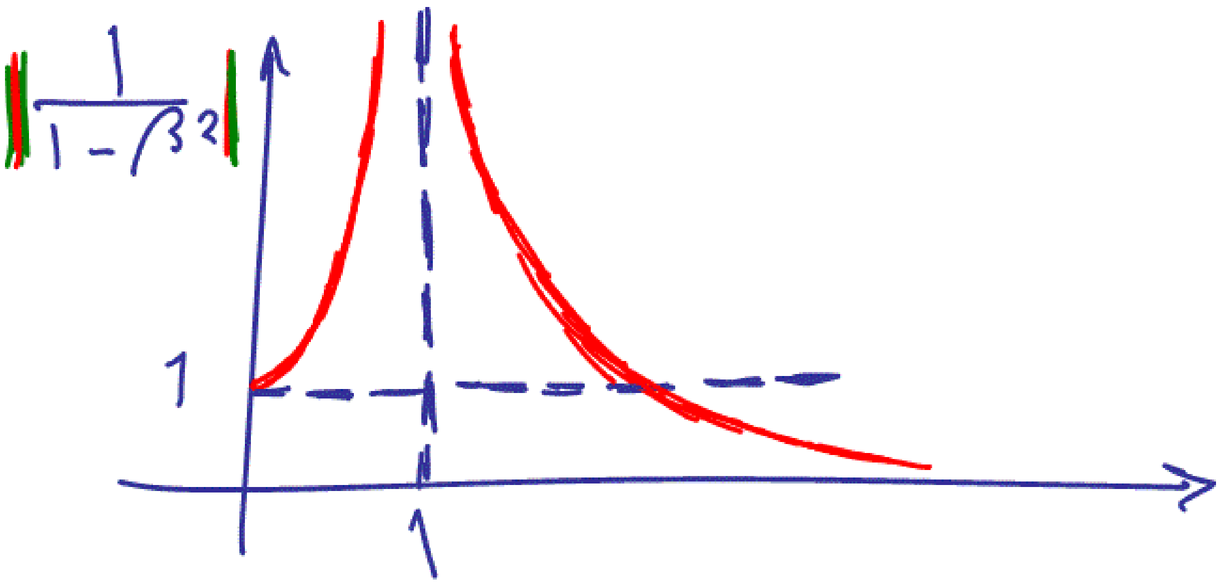
پاسخ ماندگار رابطه قبل $\rightarrow$ $(u_{st})_0 \dfrac{1}{1-\beta^2}\sin\omega t$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی

$$\boxed{R \quad M.F. = \frac{1}{1-\beta^2}}$$

Dynamic Magnification Factor

که در واقع نسبت $\dfrac{U}{(U_{st})_o}$ است




$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

حالت تشدید : ($\omega=\omega_n$)

$$\beta = 1$$

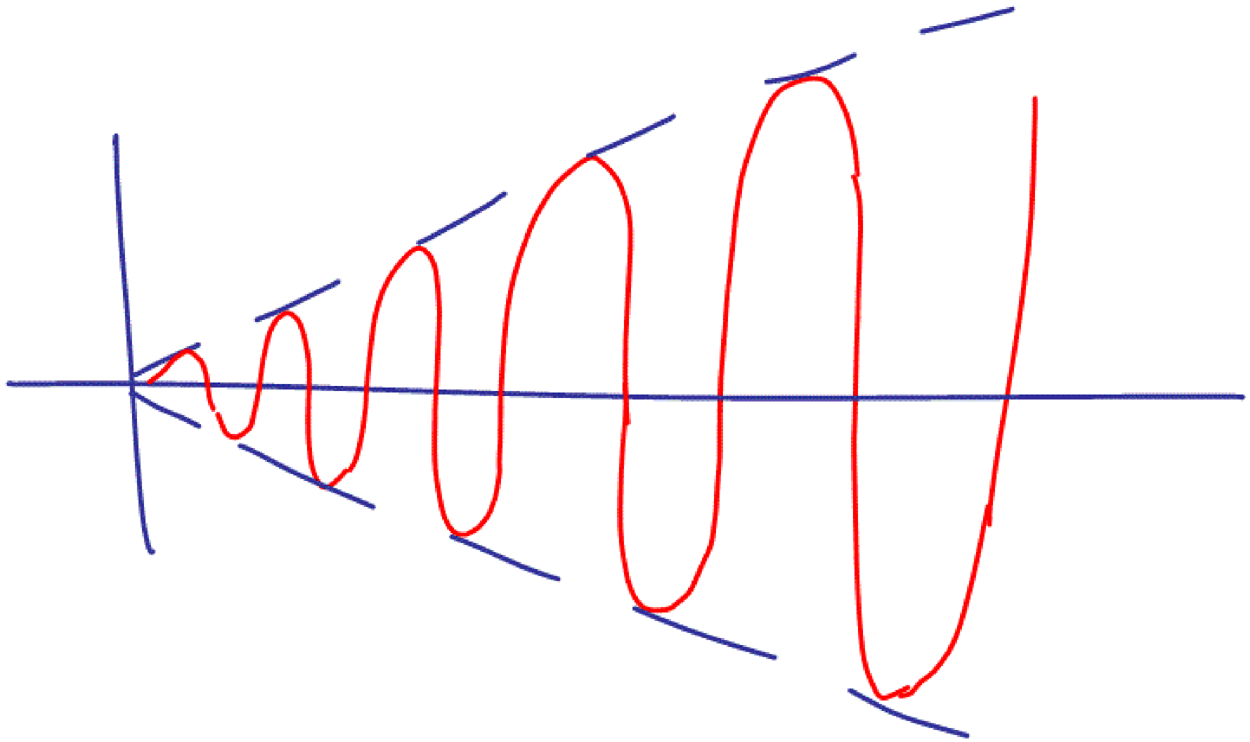
بعد از رفع ابهام معادله کلی با حالت $\beta \to 1$

داریم:

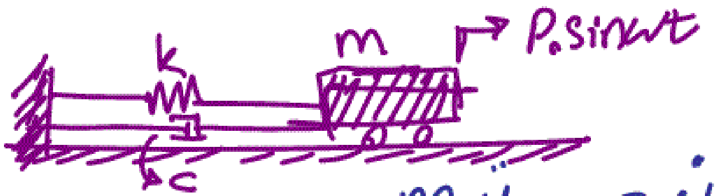
$$\boxed{u(t) = -\frac{1}{2}\frac{P_0}{k}\left(\omega_n t \cos\omega_n t - \sin\omega_n t\right)}$$

با بالا رفتن $t$ پاسخ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند

رشد می‌کند



* پاسخ ارتعاش آزاد میرا تحت اثر بارهای دینامیکی هارمونیک




$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin \omega t$$

$$\begin{cases} u_c(t) = e^{-\xi \omega_n t}\left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right) \\ u_p(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t \end{cases}$$

با قراردادن این در معادله و ساده‌سازی:

$$\left[(\omega_n^2-\omega^2)C - 2\xi\omega_n\omega D\right]\sin\omega t + \left[2\xi\omega_n\omega C + (\omega_n^2-\omega^2)D\right]\cos\omega t = \frac{P_0}{m}\sin\omega t$$

برای درست بودن رابطه بالا برای t های مختلف باید ضرایب sin و cos

در طرفین مساوی برابر باشد که از این مطلب برای محاسبه C و D

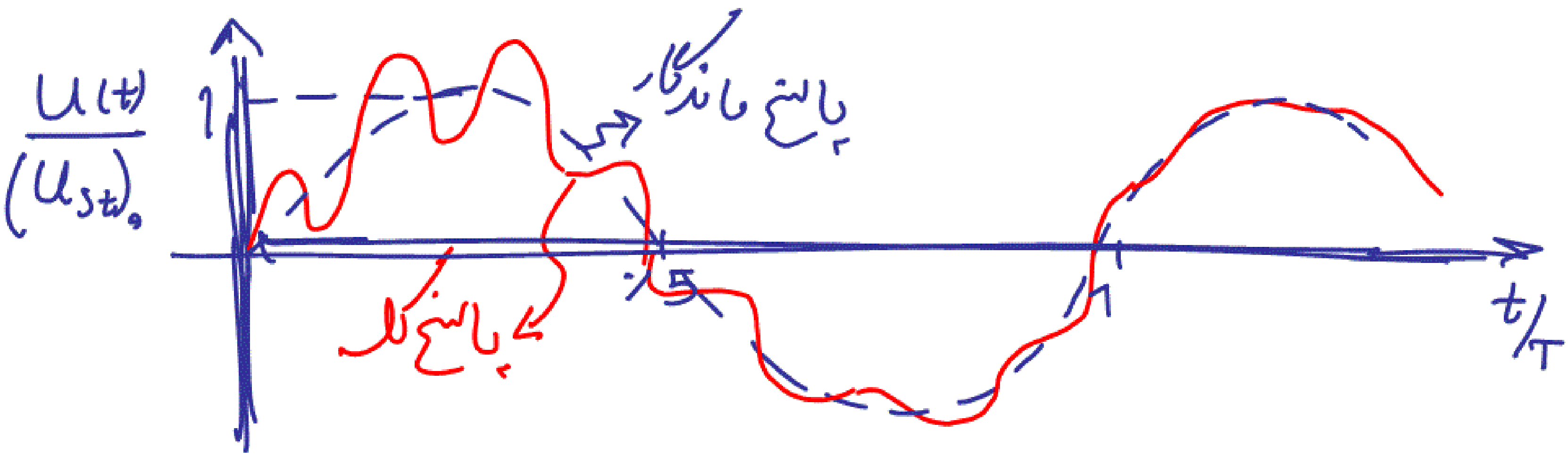
استفاده شده است و (تعیین $\omega_n^2$ جایگزینی و استفاده از رابطه $k = \omega_n^2 m$)

$$\begin{cases} (1-\beta^2)C + 2\xi\beta D = \dfrac{P_0}{k} \\ 2\xi\beta C + (1-\beta^2)D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \dfrac{P_0}{k}\,\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \\ D = \dfrac{P_0}{k}\,\dfrac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \end{cases}$$

که جواب کل به این ترتیب خواهد بود.

$$u(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega_n t}\left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right)} + \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[1-\beta^2\sin\omega t - 2\xi\beta\cos\omega t\right]$$



△ پاسخ سیستم میرا به نیروی هارمونیک

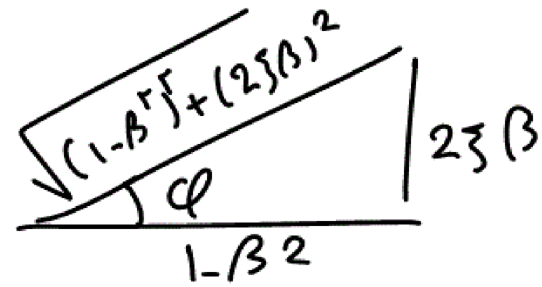
$$\left.\begin{array}{l} \xi = \%5 \\ \dfrac{\omega}{\omega_n} = \%2 \\ (u_0 = 0) \text{ و } \left(\dot{u}_0 = \omega_n \dfrac{P_0}{k}\right) \end{array}\right\}$$

---

رابطه بالا در مختصات قطبی:

$$\boxed{u(t) = U \sin(\omega t - \varphi)}$$

$$\begin{cases} U = \dfrac{P_0}{k} \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) \end{cases}$$




ضریب بزرگنمایی دینامیکی $\quad R_d = \dfrac{U}{(u_{st})_0} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$

درحالت تشدید (رزونانس) که $(\omega = \omega_n)$

$(\beta = 1)$

$$\Downarrow \quad (C = 0) \text{ و } \left(D = \frac{-(u_{st})_0}{2\zeta}\right)$$

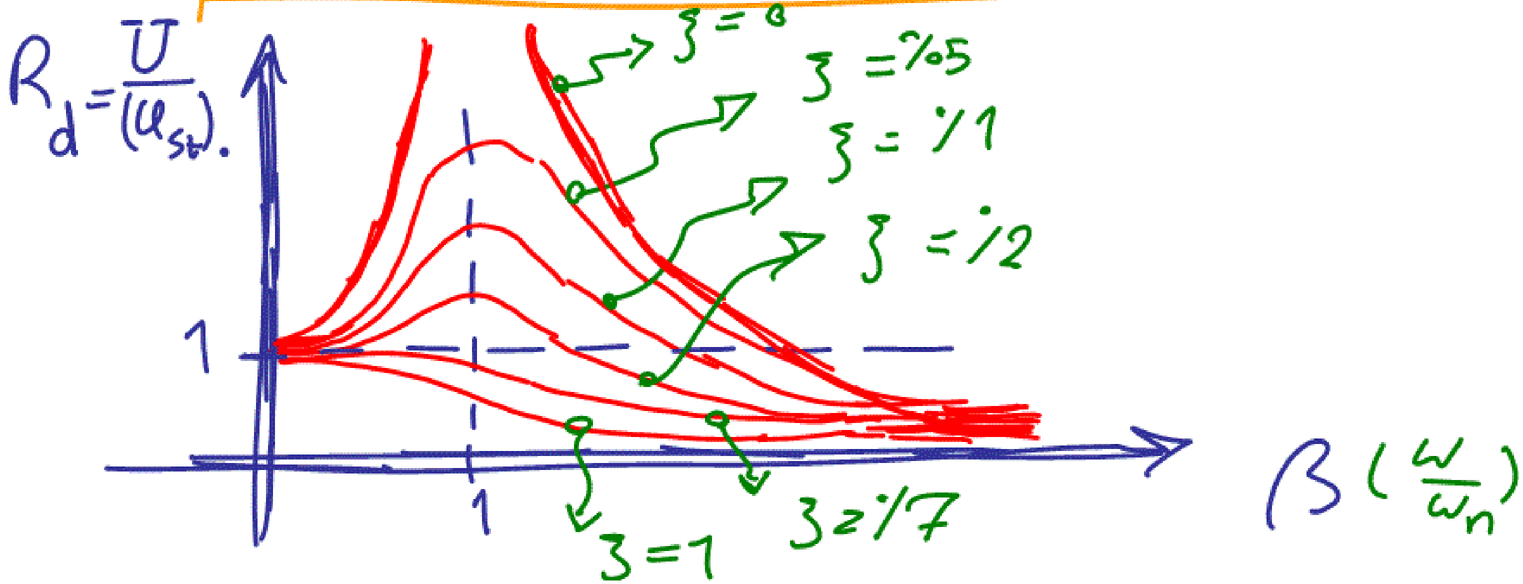
و ثابتهای A و B از حل عمومی بصورت زیر با شرایط اولیه صفر بدست می آید

$$A = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \qquad B = \frac{(u_{st})_0}{2\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$u(t) = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta}\left\{ e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{(1-\zeta^2)}\sin\omega_D t\right) - \cos\omega_n t \right\}$$

برای میرایی کم    $\omega_D \simeq \omega_n$
ترم سینوسی تقریباً برابر صفر

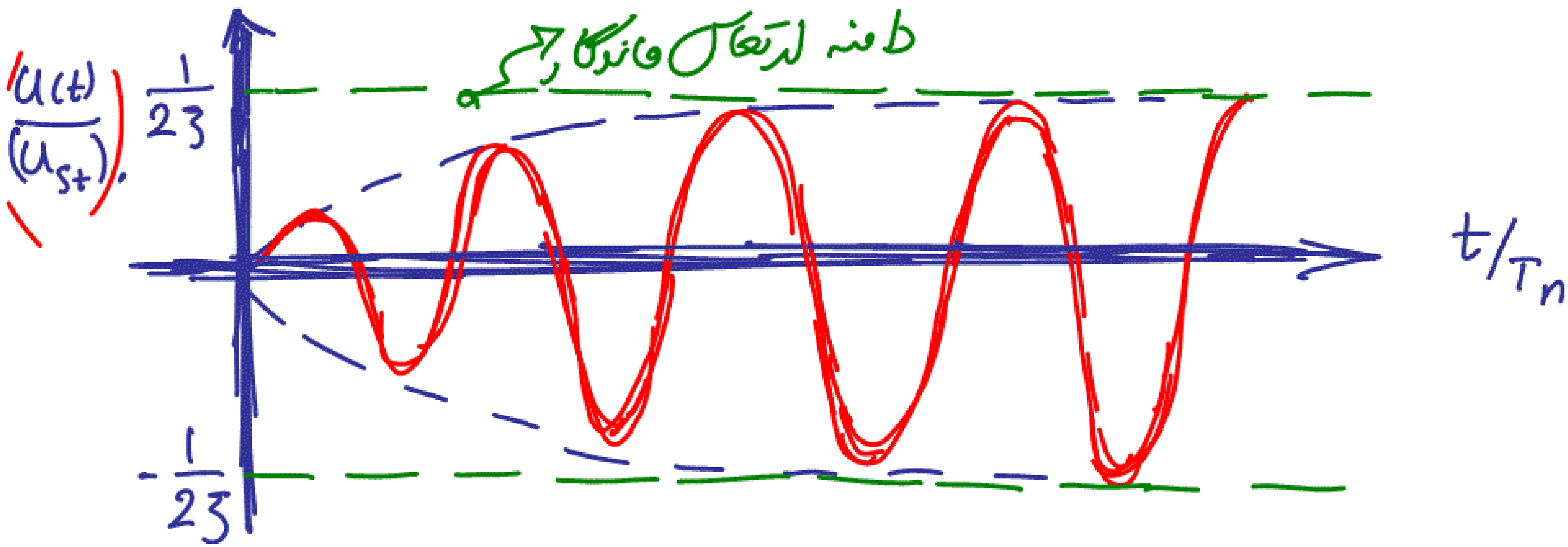
$$* \quad \boxed{u(t) = (u_{st})_0 \cdot \frac{1}{2\zeta}\left(e^{-\zeta\omega_n t} - 1\right)\cos\omega_n t}$$



* درحالتی که $\beta \ll 1$ یا نسبت $\omega$ به $\omega_n$ کوچک باشد $R_d$ به سمت 1 میل می‌کند و دامنه ارتعاش تحمیلی بطور تقریبی برابر $u_{st} = \frac{P_0}{k}$ می‌شود.

* وقتی $\beta \gg 1$ در این صورت $R_d$ به صفر میل می‌کند و دامنه ارتعاش تحمیلی خیلی کوچک است.

▽ پاسخ سیستم میرا با $\xi = \%5$ برای $(\omega = \omega_n)$ با شرایط اولیه صفر:

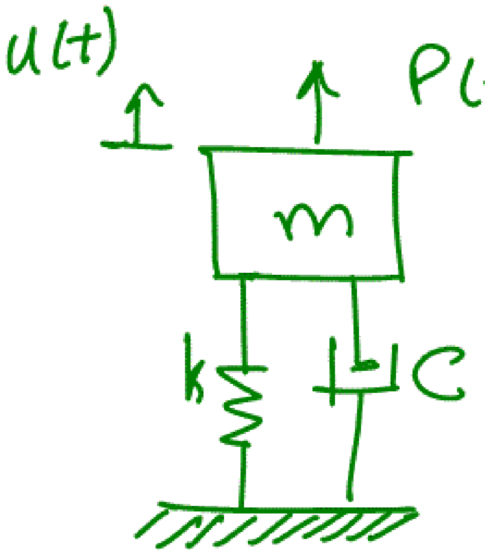



پاسخ سیستم یکدرجه آزاد تحت تحریک زمین (تکیه گاه)

[ کنترل انتقال نیرو از سیستم به پایه (زمین) ]

(Force Transmission control)

Response to support Motion




$P(t) = P_0 \sin \omega t$

$$f_T = f_S + f_D = k u(t) + c \dot{u}(t)$$

$\downarrow f_t$ نیروی منتقل شده به پی

$$\propto \quad f_T \approx (u_{st})_0 \, R_d \left[ k \sin(\omega t - \varphi) + c\omega \cos(\omega t - \varphi) \right]$$

حداکثر نیروی انتقال یافته $(f_T)_0 = (u_{st})_0 R_d \sqrt{k^2 + c^2\omega^2}$

$$(u_{st})_0 = \frac{P_0}{k}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$$

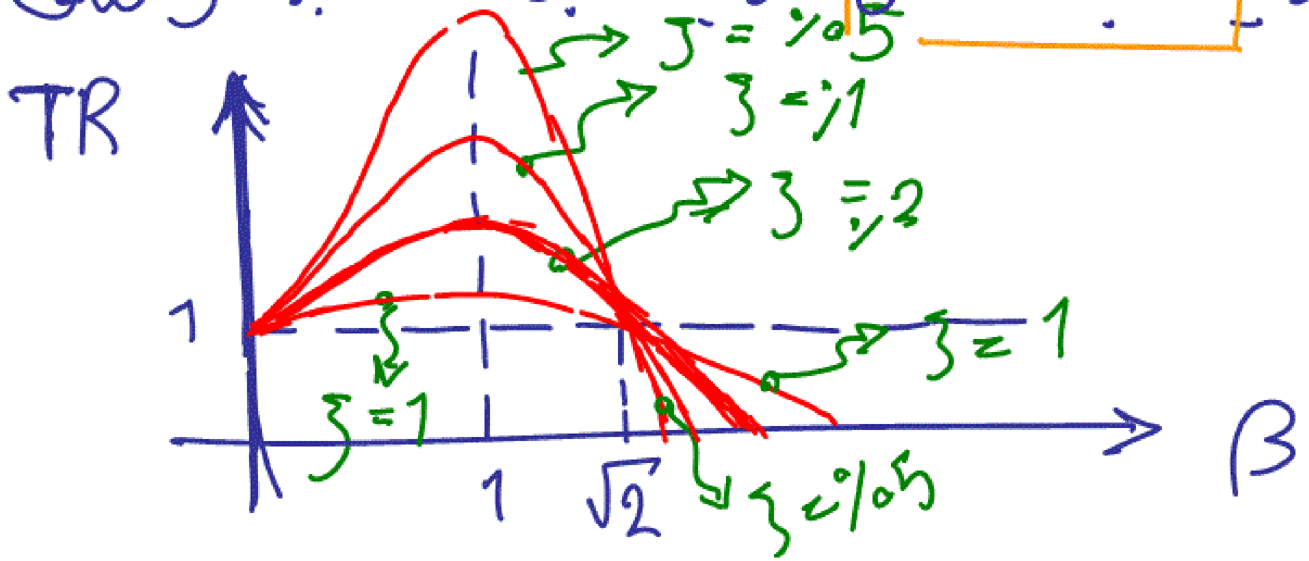
$$\frac{(f_T)_0}{P_0} = R_d \sqrt{1+(2\zeta\beta)^2} = TR$$

$TR$: Transmissibility

(درجه جداسازی حرکت ماکزیمم سازه نسبت به حرکت ماکزیمم زمین)

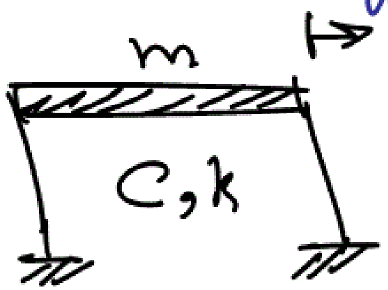
$$\boxed{TR = \sqrt{\frac{1+(2\zeta\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}}$$

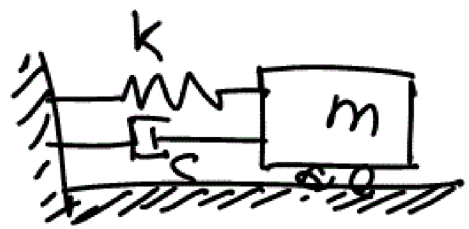
در شکل زیر قابلیت انتقال بصورت تابعی از $\beta$ برای $\zeta$ مختلف رسم شده است



انتقال حرکت از تکیه‌گاه به سیستم

$u^{Total}$ ?




$\ddot{u}_g = \ddot{u}_{g_0} \sin \omega t$ $\qquad$ $\ddot{u}_g = \ddot{u}_{g_0} \sin \omega t$

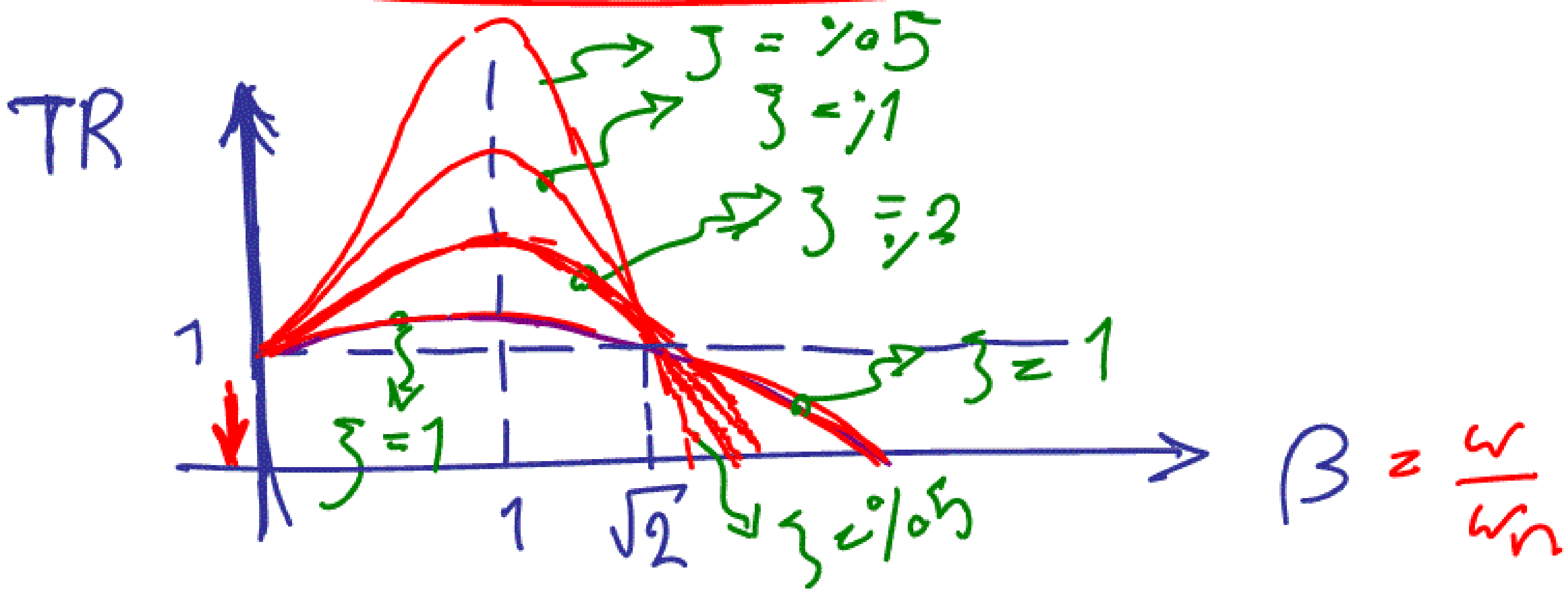
زلزله، انفجار، حرکت وسایل نقلیه

$$P_{eff} = -m\ddot{u}_g(t) = -m\ddot{u}_{g_0} \sin \omega t$$

$$u(t) = \frac{-m\ddot{u}_{g_0}}{k} R_d \sin(\omega t - \varphi)$$

$$u^{total} = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)$$

$$\boxed{T.R} = \frac{\ddot{u}_0^{total}}{\ddot{u}_{g_0}} = \frac{u_0^{total}}{u_{g_0}} = \sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$



* برای $\beta > \sqrt{2}$ میرایی اثر منفی دارد

* برای سازه با پریود بالاتر نیروی کمتری به سازه وارد می‌شود

* باید مراقب عبور دستگاه در هنگام روشن شدن از منطقه $(\beta = 1)$ بود (با تنظیم میرایی)

مثال ؟

دستگاهی با جرم $50\ kg$ بر روی مکانی نصب شده که دارای

شتاب قائم $0/2g$ با فرکانس $10\ Hz$ می باشد.
این جرم بر روی یک لاستیک با سختی $15\ kN/m$ می باشد که دارای میرایی
سیستم ۱۰ درصد می شود الف) شتاب منتقل شده به سازه
را محاسبه کنید ب) اگر محدوده مجاز شتاب دستگاه $0/07g$ باشد
با استفاده از همین لاستیک چه راه حلی را می توان پیشنهاد کرد.

الف)

$$\boxed{\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}}=\sqrt{\frac{15\times10^3}{50}}=17{,}32\ rad/s$$

$$\boxed{\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi(10)}{17{,}32} = \boxed{3{,}63}}$$

$$\boxed{TR} = \sqrt{\frac{1+(2\zeta\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\left[2\times 0{,}1\times 3{,}63\right]^2}{\left(1-(3{,}63)^2\right)^2+(2\times 0{,}1\times 3{,}63)^2}} = 0{,}1$$

دهجداسازی

شتاب منتقل شده به سازه $\rightarrow \%2g \times \underset{0.1}{\cancel{TR}} = \boxed{\%0.2g}$

ب) $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$

* با افزایش $\beta$ می‌توان نیروی انتقالی را کاهش داد

فرض کنیم شود
به جرم 100 kg افزوده $\rightarrow \omega_{new} = \sqrt{\frac{15\times10^3}{150}} = 10 \ rad/s$

$$\beta = \frac{2\pi(15)}{15} = \boxed{6{,}28}$$

$\zeta =$ ٫۱

$\zeta' = ?$ ← نسبت میرایی که به m و k بستگی دارد

(از حالت الف) $C = 2m\omega_n\zeta$

$\Rightarrow 2\times50\times17{,}32\times{,}1 = 173{,}2$

ضریب میرایی را بدست می‌آوریم

$$\xi = \frac{c}{2\, m\, \omega_n} = \frac{173{,}2}{2(150)(10)} = 0/06$$

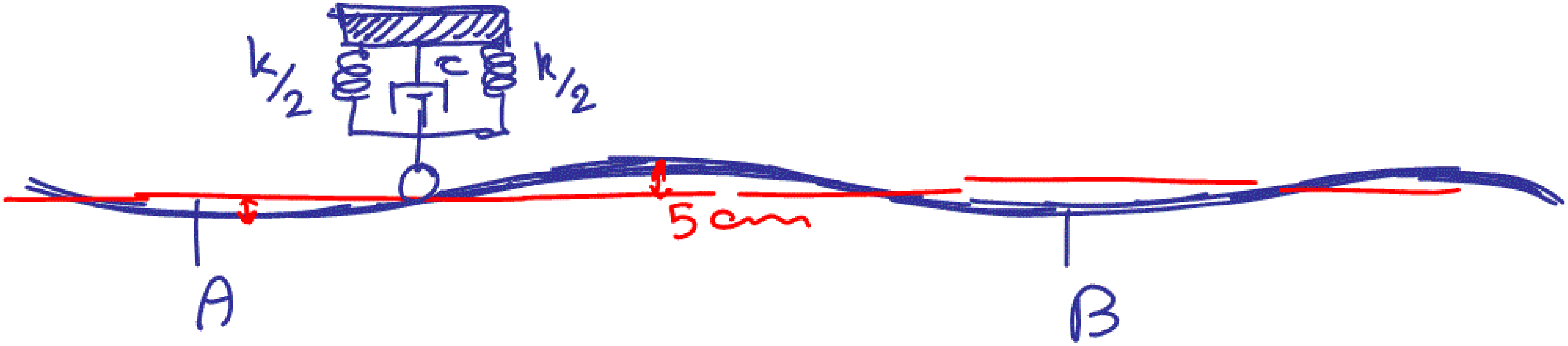
$$TR = \sqrt{\frac{1 + (2 \times 0/06 \times 6{,}28)^2}{(1 - 6{,}28^2)^2 + (2 \times 0/06 \times 6{,}28)^2}} = 0/033$$

$$\rightarrow \quad 0/29 \times 0/033 = 0/006 \ g$$

مثال ۵:

یک وسیله نقلیه که در ساده ترین حالت با یک مدل تک درجه آزاد نشان داده شده است را با وزن $15000\ N$ در نظر بگیرید. این وسیله نقلیه جاده ای را که دارای پستی و بلندی های سینوسی با دامنه $5\ cm$ است طی می کند. سختی مؤثر سیستم خودرو $1000\ N/cm$ است و درصد میرایی آن $25\%$ می باشد. بیشترین دامنه ارتعاش قائم آن را وقتی خودرو با سرعت $100$ کیلومتر بر ساعت فاصله

30 متری بین نقاط A و B را طی می کند، محاسبه نمایید:




$$\frac{u^{total}}{u_{g_0}} = \sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$ / قابلیت انتقال

$v = 100 \ km/h = 27,78 \ m/s$

مربوط به نیرو $T = \frac{30}{27,78} = 1,08 \ sec$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{W/g}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{15000/981}{1000}} = 0/776 \ \text{Sec}$$

$$k = 1000\ N/cm = 100000\ N/m$$

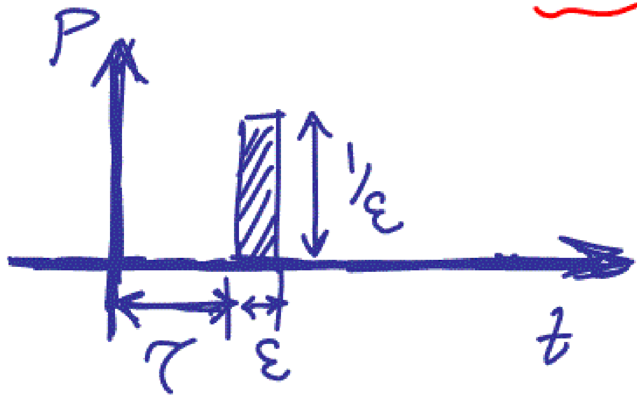
$$\begin{cases} \text{نسبت تواتر} \quad \beta = \dfrac{T_n}{T_{\text{نیرو}}} = \dfrac{\omega}{\omega_n} = \dfrac{0/776}{1/08} = 0/7 \\ \xi = 0/25 \end{cases}$$

$$U_{total} = 5\sqrt{\frac{1+(2\times 0/25\times 0/7)^2}{(1-0/7^2)^2+(2\times 0/25\times 0/7)}} = 8/56$$

تغییر مکان بیشینه

"پاسخ سازه تحت تحریک دلخواه"

⇐ پاسخ سازه تحت بار ضربه‌ای واحد (unit Impulse)




$$P(t) = 1/\varepsilon$$

$$\varepsilon \to 0 \Rightarrow P \to \infty$$

لیکن سطح زیر نمودار که نیروی وارده را تشکیل می‌دهد همواره 1 است

بخاطر همین ضربه واحد نامیده می‌شود.

$\delta(t-\tau)$ تابع دلتای دیراک یک ضربه

واحد را با مرکز $(t=\tau)$

بصورت ریاضی بیان می‌کند

$$P=\frac{d}{dt}(m\dot{u})$$ مطابق قانون دوم نیوتن

مومنتوم

$$P=m\ddot{u}$$

انتگرال ازطرفین $\Downarrow$

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} P\,dt}_{\text{بزرگای ضربه}} = m(\dot u_2 - \dot u_1) = \underbrace{m\,\Delta \dot u}_{\text{تغییرات اندازه حرکت}}$$

$$1 = m\,\dot u(\tau) \rightarrow \begin{cases} \dot u(\tau) = \frac{1}{m} \\ u(\tau) = 0 \end{cases}$$

که جابجایی تا زمان وارد شدن ضربه

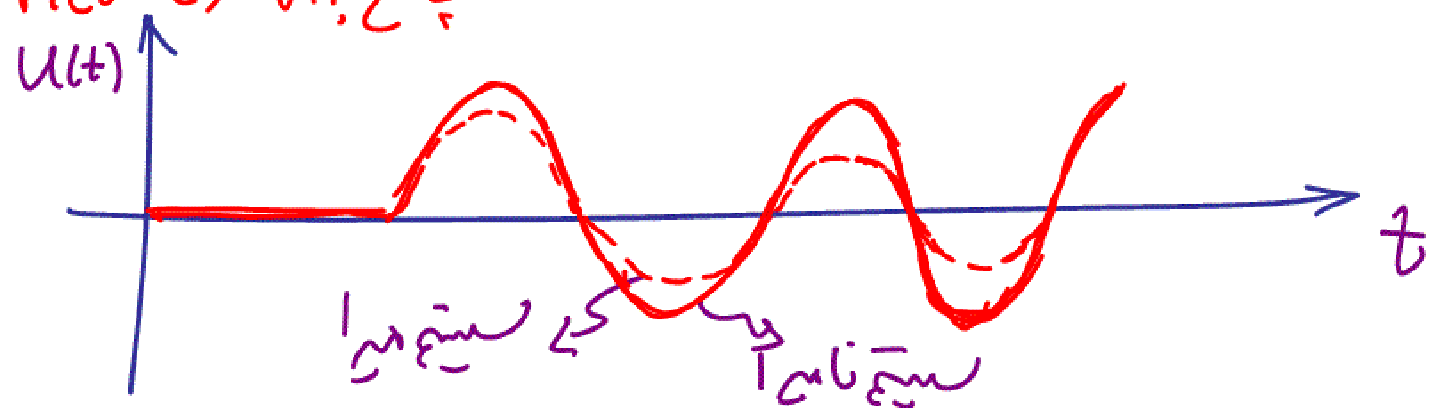
بارگذاری در زمان بسیار کوتاهی اتفاق می‌افتد و سیستم جرم، فنر و میراگر فرصت پاسخ پیدا نمی‌کند

* پاسخ سیستم تک درجه آزادی تحت بار ضربه‌ای مانند پاسخ ارتعاش آزاد سیستم با شرایط اولیه $u(\tau)$ , $\dot{u}(\tau)$ است

سیستم بدون میرایی $\rightarrow$ $\boxed{h(t-\tau)=u(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin(\omega_n(t-\tau))}$

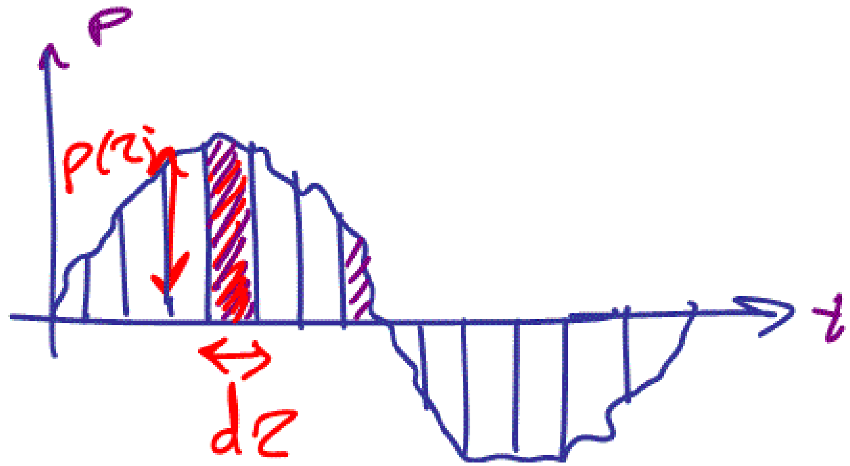
سیستم میرا $\rightarrow$ $\boxed{h(t-\tau)=u(t)=\frac{1}{m\omega_D}e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}}\sin(\omega_D(t-\tau))$

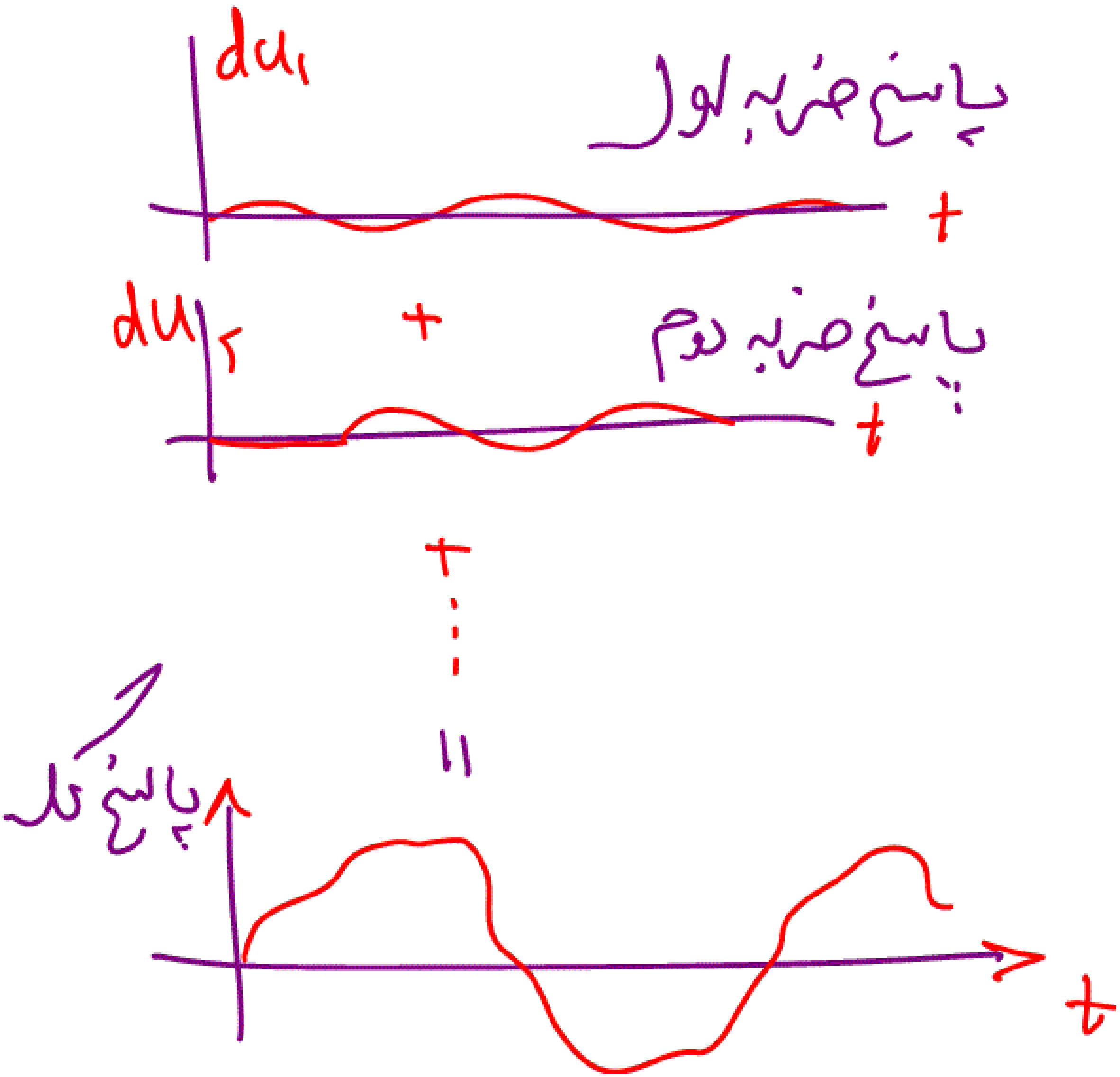
$h(t-\tau)$ پاسخ ضربه واحد



- پاسخ به نیروی دلخواه

نیرو را می‌توان بصورت یک سری ضربه‌های کوتاه متوالی در نظر گرفت





du1
پاسخ ضربه اول
t
+
du2
پاسخ ضربه دوم
t
+
=
پاسخ کل
t

* $\tau$ ضربه در زمان $\tau$ بزرگی = $P(\tau)\,d\tau$

$$du(t) = [P(\tau)\,d\tau]\,h(t-\tau)$$

$$\boxed{u(t) = \int_0^t P(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau}$$ ✓

convolution

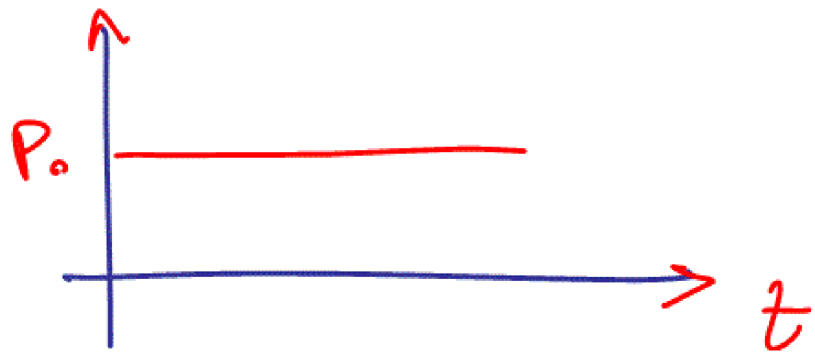
انتگرال تلفیقی (کانولوشن)

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\,e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_D(t-\tau)]\,d\tau}$$

انتگرال دیوهامل

برای سیستم غیرمیرا

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int P(\tau) \sin[\omega_n (t-\tau)]\, d\tau}$$




نیروی پله‌ای

Step force

$\boxed{\text{سیستم نامیرا}}$ $\rightarrow$ $m\ddot{u}+ku=P_0$

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t P_0\sin[\omega_n(t-\tau)]\,d\tau=\frac{P_0}{m\omega_n^2}\Big[\cos\omega_n(t-\tau)\Big]_0^t$$

$$u(t)=\frac{P_0}{k}(1-\cos\omega_n t)=(u_{st})_0\left(1-\cos\frac{2\pi t}{T_n}\right)$$

$$(u(t))_{MAX}=2(u_{st})_0$$

تغییر شکل ناشی از اعمال ناگهانی نیرو دو برابر تغییر شکل استاتیکی ناشی از اعمال آرام نیرو است

درستمرا

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0$$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P_0 e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\left[\omega_D(t-\tau)\right] d\tau$$

جزء به جزء

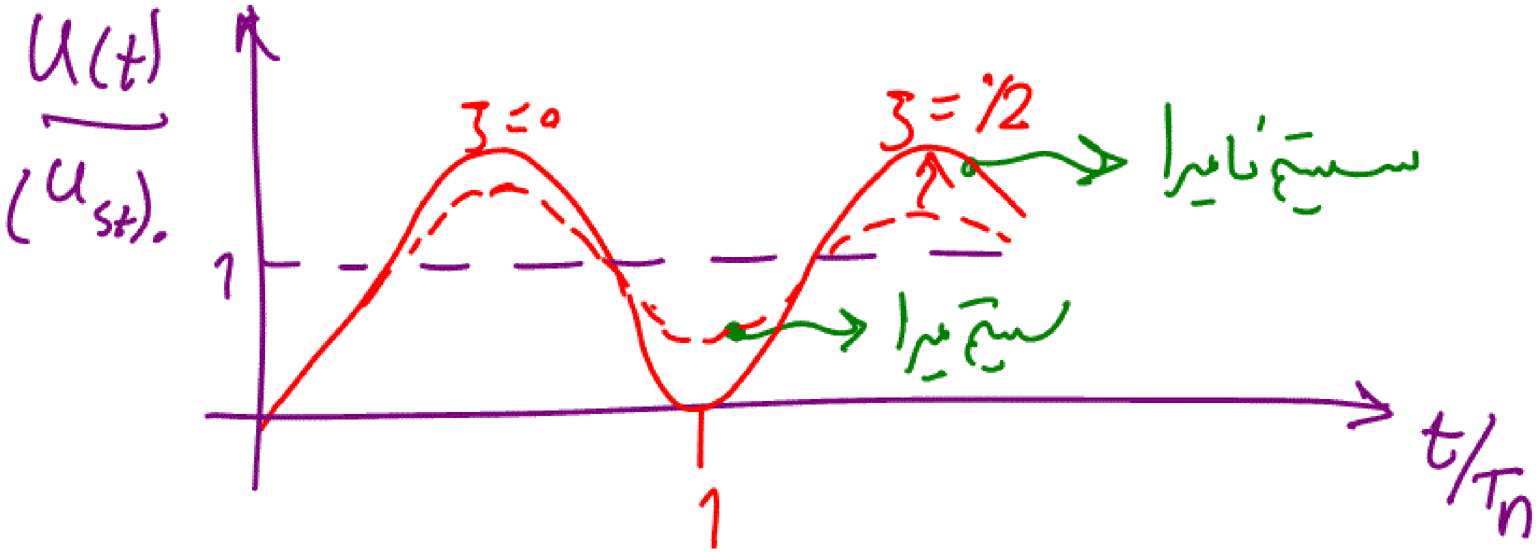
$$u(t) = \frac{P_0}{k}\left[1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D t\right)\right]$$

حل کلاسیک

$$\begin{cases} u_p = \dfrac{P_0}{k} \\ u_c = e^{-\xi\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t) \end{cases}$$

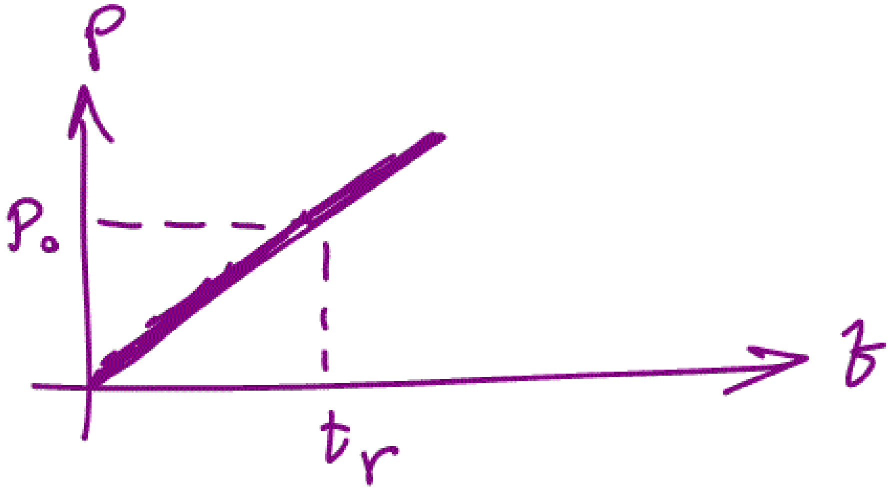
$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \dot{u}_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(A = -\frac{P_0}{k}\right) \text{ و } \left(B = -\frac{P_0}{k}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$u(t) = u_p + u_c$ همان نتیجه



نیروی شیب دار

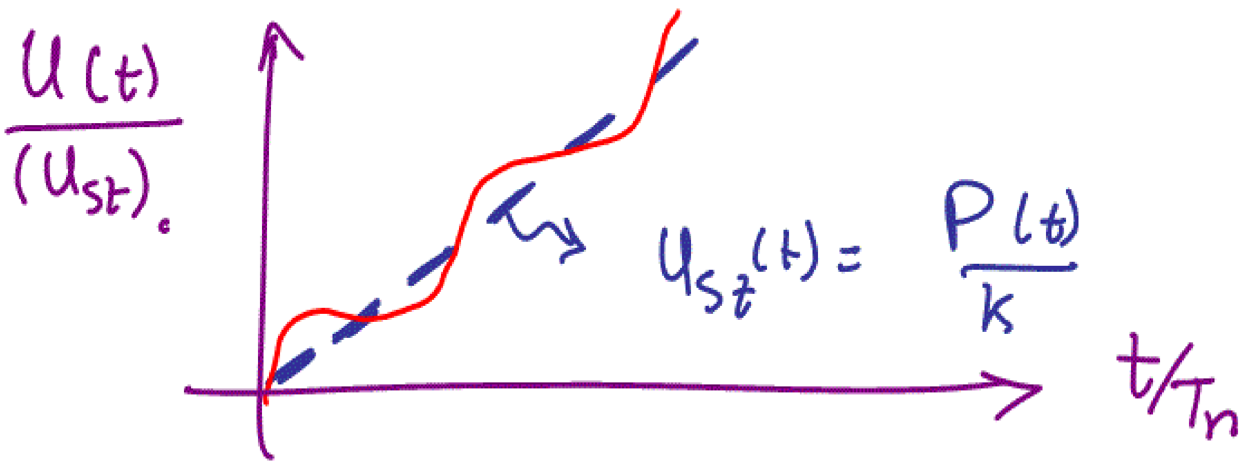
Ramp force



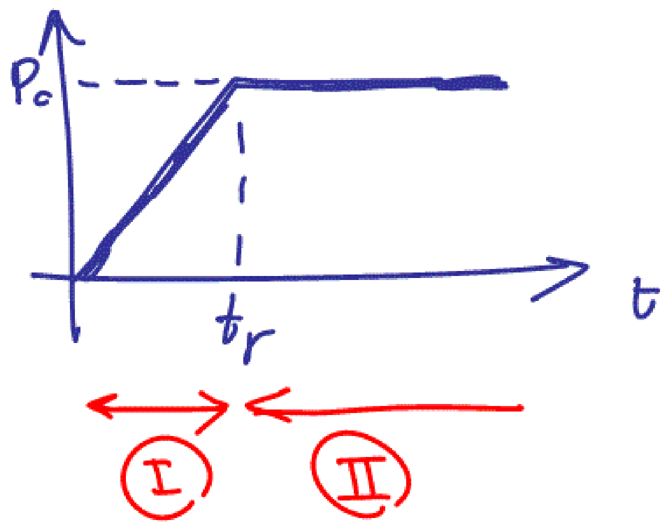

نیروی وارده $P(t) = P_0 \dfrac{t}{t_r}$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t \frac{P_0}{t_r}\tau \sin[(t-\tau)\omega_n]\,d\tau$$

با حل و ساده کردن انتگرال فوق $\rightarrow$ $u(t) = \dfrac{P_0}{k}\left(\dfrac{t}{t_r} - \dfrac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_r}\right)$




نیروی شیب دار - پله‌ای




$$P(t) = \begin{cases} P_0 \, t/t_r & t \leqslant t_r \\ P_0 & t \geqslant t_r \end{cases}$$

$$\boxed{\text{I} \rightarrow \quad u(t) = (u_{st})_0 \left( \frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_r} \right)} \qquad t \leqslant t_r$$

II, مقادیر اولیه فاز

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = (u_{st})_0 \left( \frac{1}{t_r} - \frac{\cos \omega_n t}{t_r} \right) \\ t = t_r \rightarrow \left\{ u(t_r) = (u_{st})_0 \left( 1 - \frac{\sin \omega_n t_r}{\omega_n t_r} \right) \right. \end{cases}$$

$$\dot{u}(t_r) = (u_{st})_0 \left(\frac{1}{t_r} - \frac{\cos \omega_n t_r}{t_r}\right)$$

$$= \frac{(u_{st})_0}{t_r}\left(1 - \cos \omega_n t_r\right)$$

II $\rightarrow$

$$u(t) = \underbrace{u(t_r)\cos(t-t_r) + \frac{\dot{u}(t_r)}{\omega_n}\sin \omega_n (t-t_r)}_{\text{ارتعاش آزاد}} +$$

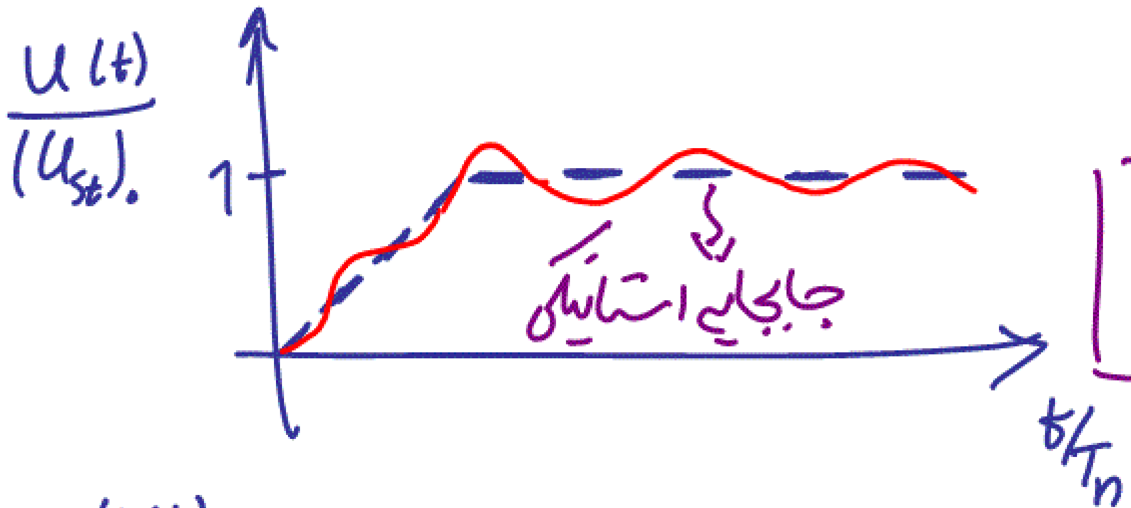
$$+ (u_{st})_0 \underbrace{\left[1 - \cos \omega_n (t-t_r)\right]}_{\text{Step force}}$$

$$u(t) = (u_{st})_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\omega_n t_r} \left[ (1-\cos\omega_n t_r)\sin\omega_n (t-t_r) - \sin\omega_n t_r \cos\omega_n (t-t_r) \right] \right\}$$

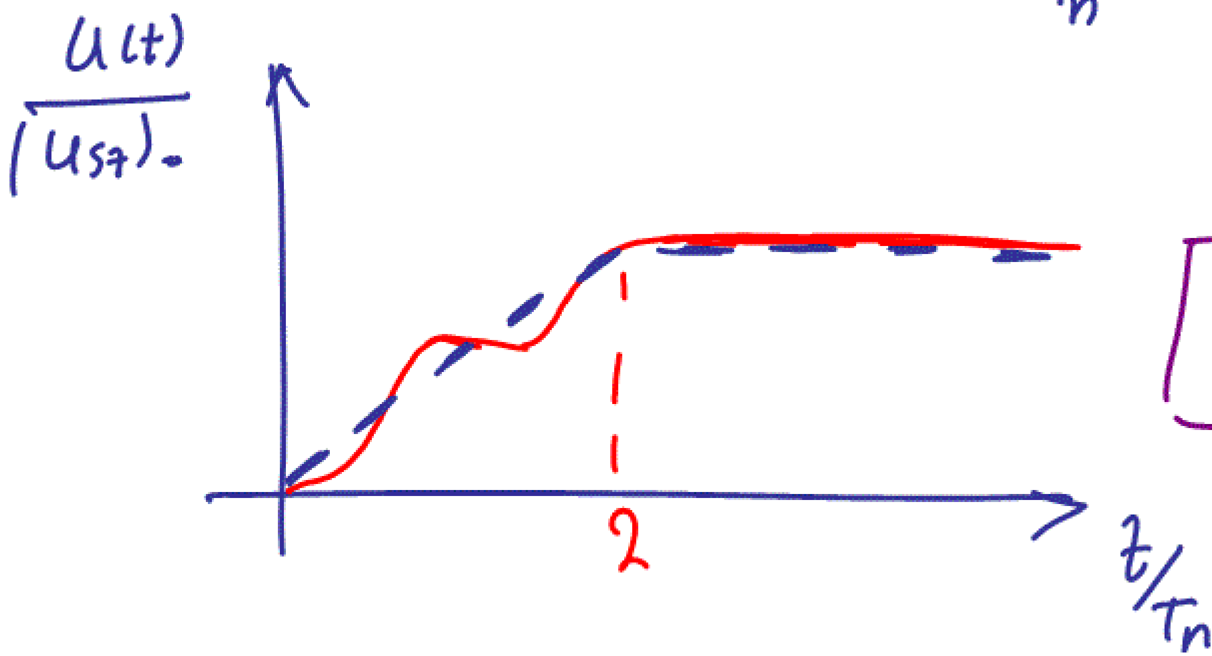
با استفاده
از روابط مثلثاتی

$$\boxed{u(t) = (u_{st})_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\omega_n t_r} \left[ \sin\omega_n t - \sin\omega_n (t-t_r) \right] \right\}}$$

$$t \geq t_r$$




$$\boxed{\frac{t_r}{T_n} = 1{,}5}$$



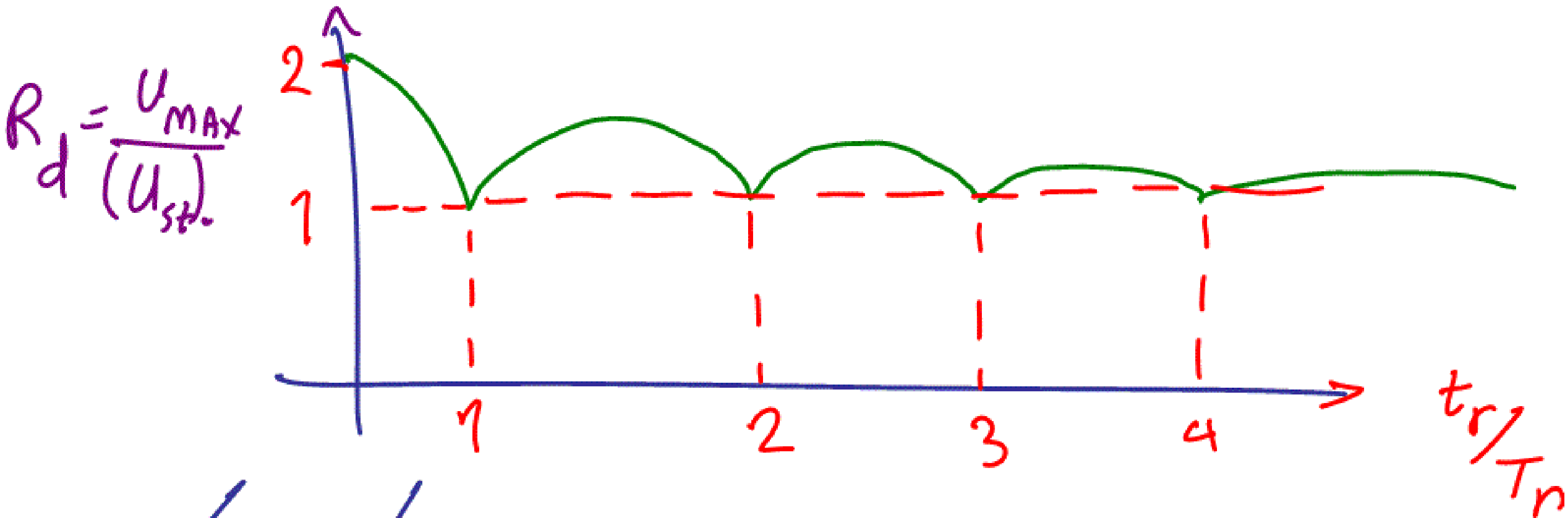

$$\boxed{\frac{t_r}{T_n} = 2}$$

$$u_{max} = (u_{st})_0 \left[1 + \frac{1}{\omega_n t_r}\sqrt{(1-\cos\omega_n t_r)^2 + (\sin\omega_n t_r)^2}\right]$$

با استفاده از روابط مثلثاتی و تساوی $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ رابطه بالا به صورت زیر خلاصه می‌شود ؛

ضریب پاسخ

$$R_d = \frac{u_{max}}{(u_{st})_0} = 1 + \frac{\left|\sin\left(\pi \frac{t_r}{T_n}\right)\right|}{\pi \frac{t_r}{T_n}}$$



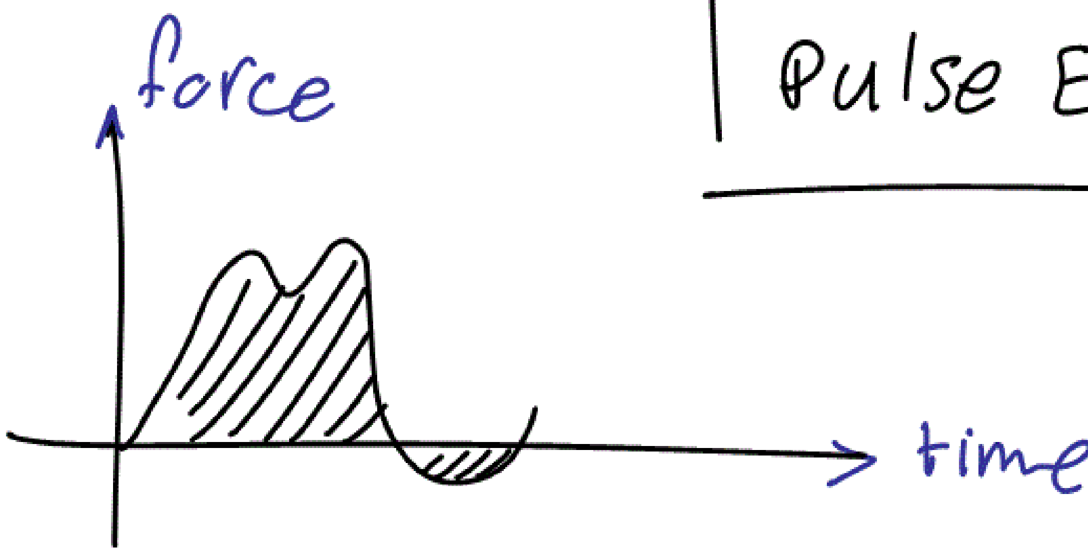

* با بزرگ شدن زمان صعود $t_r > 3T_n$ تغییر شکل دینامیکی به استاتیکی نزدیک می‌شود (اثر تحریک نزدیک به نیروی استاتیکی می‌شود)

* در زمان صعود کوتاه $t_r < \frac{T_n}{4}$ تغییر شکل دینامیکی حدود

که برابر تغییر شکل استاتیکی است یعنی اثر تحریک نزدیک به نیروی پله‌ای است.

پاسخ به تحریکهای پالسی

Pulse Excitation

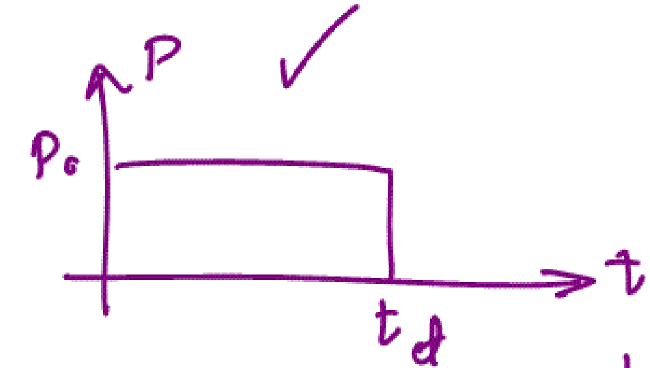


روشهای مختلف

← روش کلاسیک حل معادله دیفرانسیل

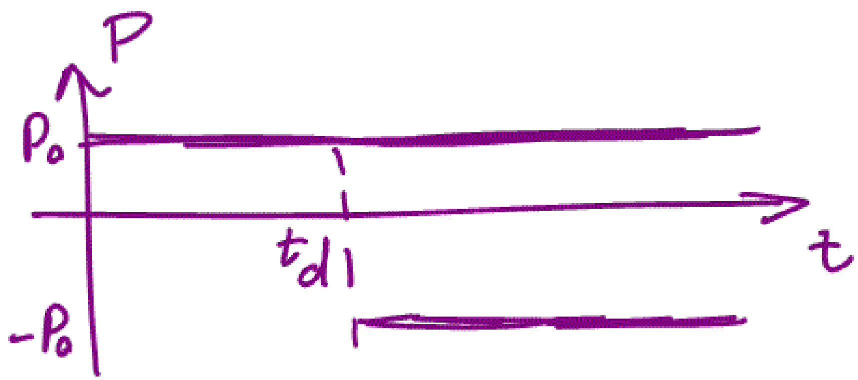
← استفاده از انتگرال دیوهامل

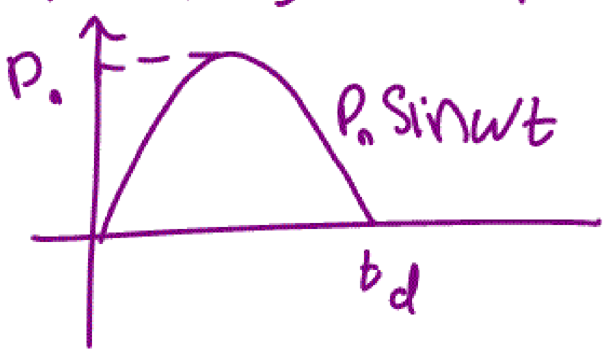
← با استفاده از جمع آثار توابع ساده‌تر



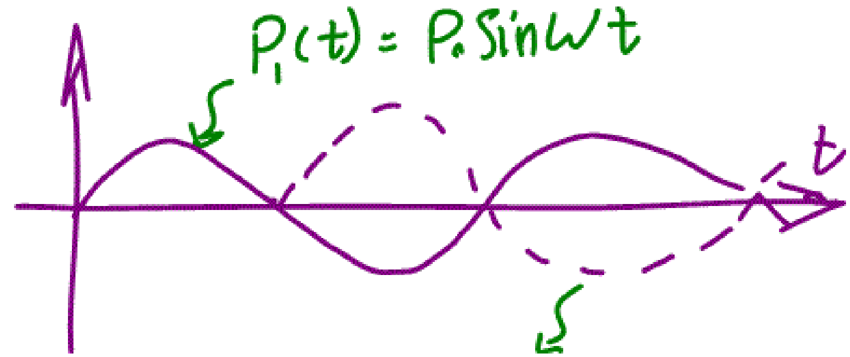

Rectangular pulse

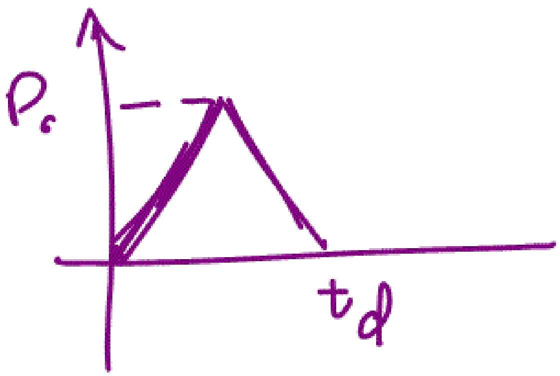
=



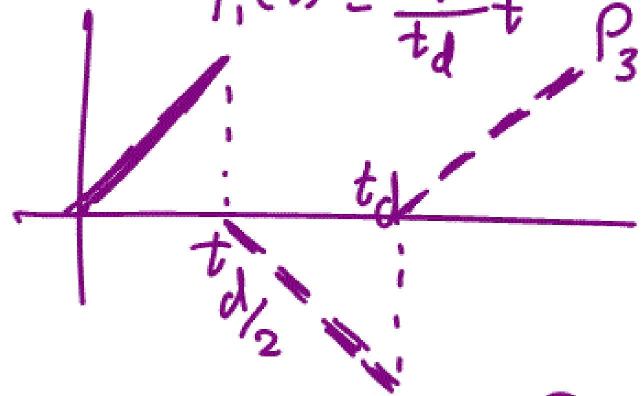




=






$=$



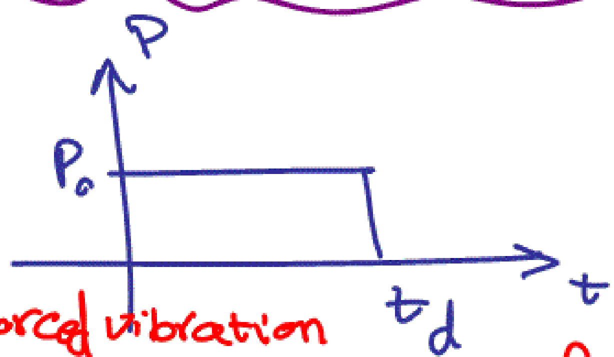

$$P_2(t) = P_0 \sin\omega(t-t_d)$$

$$P_1(t) = \frac{2P_0}{t_d}t$$

$$P_3(t) = \frac{2P_0}{t_d}(t-t_d)$$

$$P_2(t) = -\frac{4P_0}{t_d}(t-t_d)$$

نیروی پالسی مستطیلی :




$$m\ddot{u}+ku = \begin{cases} P_0 & t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

forced vibration I

II free vibration

(I) $\longrightarrow$ step force ناشی

$$\boxed{u(t) = (u_{st})_0\,(1-\cos\omega_n t) = (u_{st})_0\left(1-\cos\frac{2\pi t}{T_n}\right)} \quad t \le t_d$$

(II) $\longrightarrow$ $u(t) = u(t_d)\cos\omega_n(t-t_d) + \dfrac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_d)$

شرایط اولیه که شرایط انتهای فاز (I) است

$$\begin{cases} u(t_d) = (u_{st})_0\,[1-\cos\omega_n t_d] \\ \dot{u}(t_d) = (u_{st})_0\,\omega_n\sin\omega_n t_d \end{cases}$$

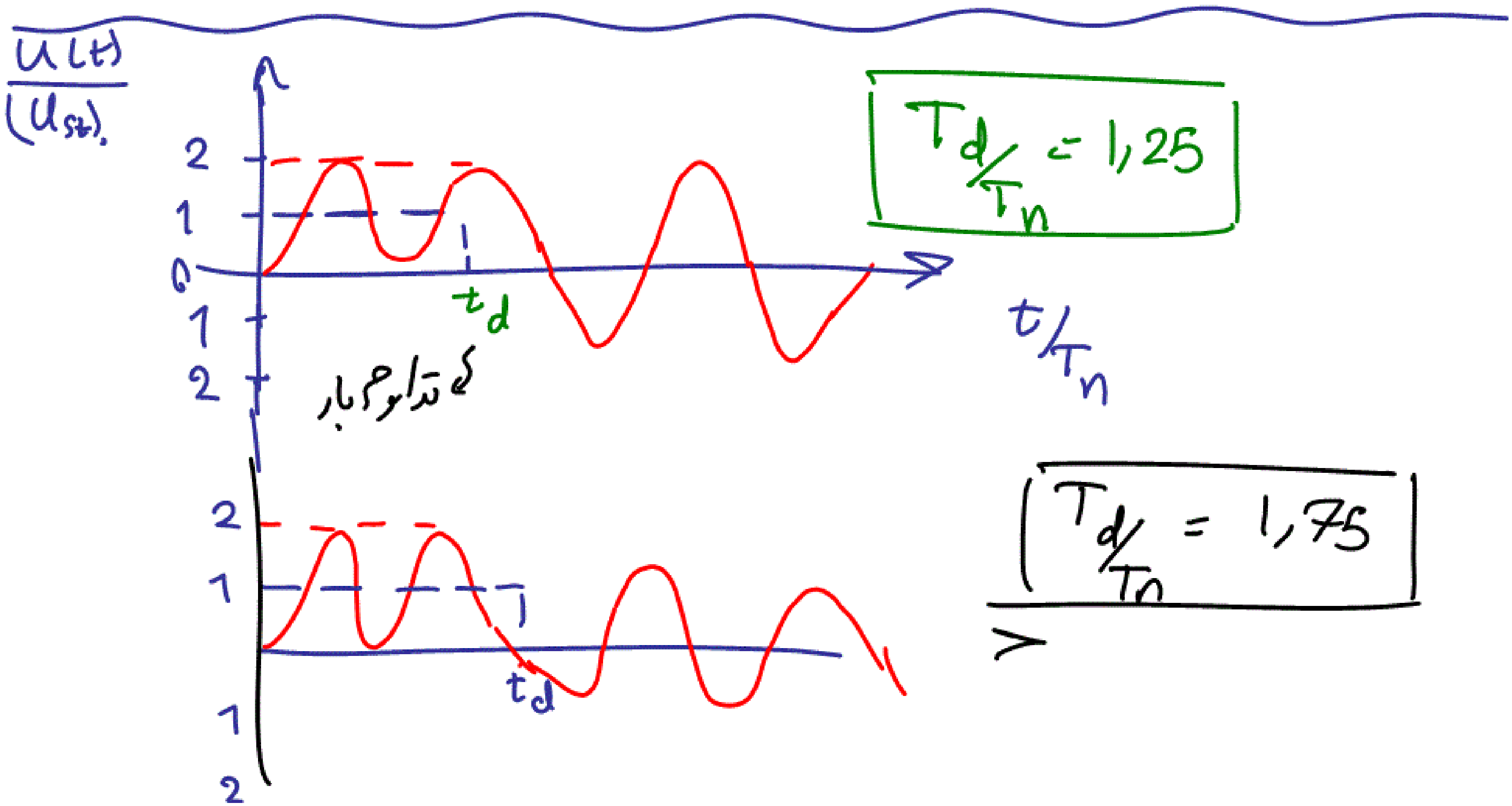
$$u(t) = (u_{st})_0 \left[\cos \omega_n (t - t_d)(1 - \cos \omega_n t_d) + \sin \omega_n t_d \sin \omega_n (t - t_d)\right]$$

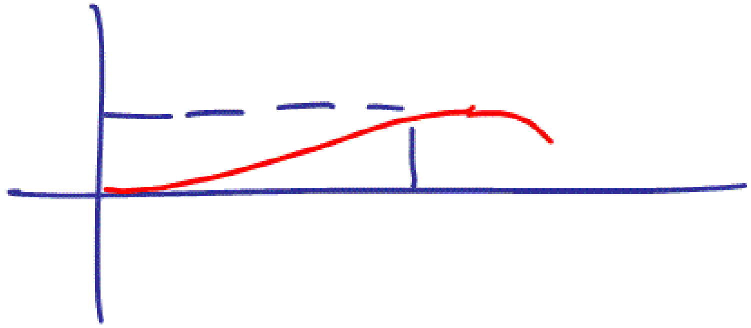
وبااستفاده از روابط مثلثاتی :

$$u(t) = (u_{st})_0 \left[\cos \omega_n (t - t_d) - \cos \omega_n t\right]$$

وبا توجه به $\omega_n = \dfrac{2\pi}{T_n}$

$$\boxed{u(t) = (u_{st})_0 \left(2 \sin \frac{\pi t_d}{T_n}\right) \sin\left[2\pi \left(\frac{t}{T_n} - \frac{1}{2}\frac{t_d}{T_n}\right)\right]} \quad t > t_d$$


u(t)/(u_st)_0
2
1
0
1
2
t_d
Td/Tn = 1,25
t/Tn
تداوم بار
2
1
t_d
1
2
Td/Tn = 1,75



$T_d / T_n = 1/4$

پاسخ ماکزیمم :

Phase I

$$R_d = \begin{cases} 2 & t_d/T_n \geq 1/2 \\ \dfrac{u(t_d)}{(u_{st})_0} = 1 - \cos 2\pi \dfrac{t_d}{T_n} & t_d/T_n \leq 1/2 \end{cases}$$

Phase 2

$$\bar{U} = \sqrt{[u(t_d)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n}\right]^2}$$

$$= 2(u_{st})_o \left|\sin \frac{\pi t_d}{T_n}\right|$$

$$\boxed{R_d = \frac{\bar{U}}{(u_{st})_o} = 2\left|\sin \frac{\pi t_d}{T_n}\right|}$$

## تحلیل تقریبی برای ضربه‌های کوتاه

اگر مدت دوام ضربه $(t_d)$ کوچکتر از $\frac{T_n}{2}$ باشد حداکثر مطلق تغییر مکان در حین ارتعاش آزاد بوجود آمده و مقدار آن تابع مقدار ضربه (مساحت سطح زیر نمودار ضربه) می‌باشد این موضوع را می‌توان با حالت حدی $\left(t_d/T_n \rightarrow 0\right)$ توصیف کرد

که اگر زمان تداوم ضربه نسبت به $T_n$ خیلی کوچک شود تبدیل به یک ضربه خالص با مقدار زیر می‌شود

$$I = \int_0^{t_d} p(t)\,dt$$

پاسخ سیستم به نیروی ضربه‌ای فوق مساوی پاسخ ضربه واحد در مقدار $I$ است

$$u(t) = I\left(\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$

تغییر شکل حداکثر برابر با

$$\boxed{u = \frac{I}{m\omega_n} = \frac{I}{k}\,\frac{2\pi}{T_n}}$$

بنابراین تغییر شکل حداکثر با مقدار ضربه $\boxed{I = P_0 t_d}$

برابر است با:

$$\boxed{\frac{U}{(U_{st})_0} = 2\pi \frac{t_d}{T_n}}$$

در محدوده $\frac{t_d}{T_n} < \frac{1}{4}$ حل مربوط به ضربه خالص نزدیک به پاسخ واقعی

است و با افزایش $\frac{t_d}{T_n}$ از $\frac{1}{2}$ اختلاف بین حل دقیق و

تقریبی افزایش می‌یابد و حل تقریبی معتبر نیست چون حل مربوط

به ضربه خالص فرض می‌کند که حداکثر تغییر شکل در ارتعاش آزاد رخ
می‌دهد ولی وقتی $t_d/T_n \geq 1/2$ می‌شود حداکثر درحین وقوع ضربه رخ
می‌دهد