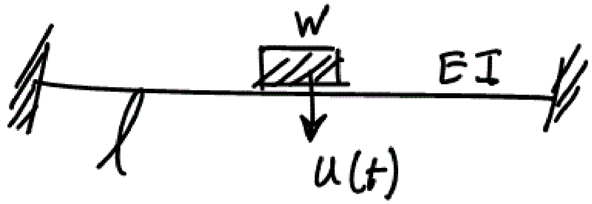
بسم الله الرحمن الرحیم

هفته چهارم

مثال:



وزنه W در وسط تیر دوسر گیردار قرار گرفته است با صرف نظر کردن از وزن تیر دوره تناوب طبیعی آن را بدست آورید و مقادیر تغییر مکان، سرعت و شتاب وزنه در ($t = 2\ sec$) را محاسبه کنید.

$W = 2200\ kgf$

$EI = 2{,}9 \times 10^{9}\ kgcm^2$

$L = 3m$

$u(0) = 1{,}25\ cm$

$\dot{u}(0) = 37{,}5\ cm/sec$

وسط دهانه $\Delta = \dfrac{PL^3}{192\,EI}$

$$\Delta = 1 \Rightarrow k = \frac{192EI}{L^3} = \frac{192 \times 2{,}9 \times 10^9}{(300)^3} = 20622 \ kg/cm$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{2200}{981} = 2{,}24 \ kg\,sec^2/cm$$

$$T_n = ۲\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = ۲\pi \sqrt{\frac{۲٫۲۴}{۲۰۶۲۲}} = ۰٫65 \ sec$$

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{20622}{2{,}24}} = 95{,}95 \ RPS$$

معادله حرکت ارتعاش آزاد :

$$u(t) = u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

تغییر مکان : $u(t) = 1{,}25\cos 95{,}95t + 0/391\sin 95{,}95t$

سرعت : $\dot{u}(t) = -119{,}9375\sin 95{,}95t + 37{,}4205\cos 95{,}95t$

شتاب : $\ddot{u}(t) = -11508/0031\cos 95{,}95t - 3590{,}497\sin 95{,}95t$

در لحظه $t = 2_s$:

$$\left.\begin{aligned} u(t=2) &= -1{,}106\ \text{cm} \\ \dot{u}(t=2) &= -4{,}97\ \text{cm/s} \\ \ddot{u}(t=2) &= 120{,}46\ \text{cm/s}^2 \end{aligned}\right\}$$

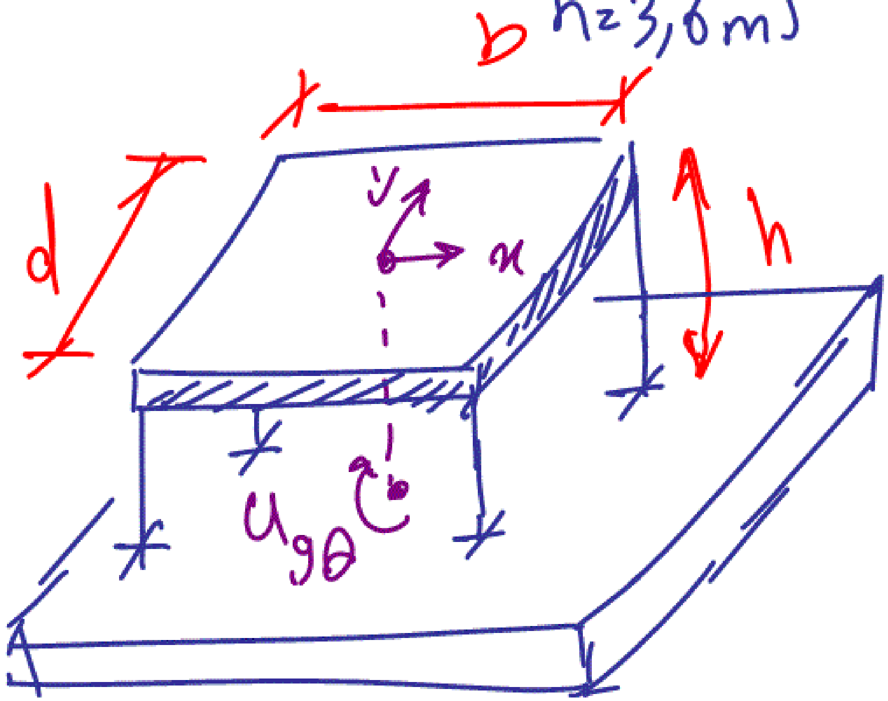
مثال سیستم سازه زیر با

$$\left.\begin{aligned} b &= 9\,m \\ d &= 6\,m \\ h &= 3{,}6\,m \end{aligned}\right\}$$

وزن دال $0/5\ ton/m^2$ را درنظر بگیرید

سختی هر ستون بصورت زیر است

$$\left.\begin{aligned} k_x &= 0/27\ t/cm \\ k_y &= 0/18\ t/cm \end{aligned}\right\}$$



فرکانس وزمان تناوب طبیعی
حرکت پیچشی این سیستم را حول امتداد قائم محاسبه کنید

$$k_\theta = k_x d^2 + k_y b^2$$

$$(/27)(100)\,6^2 + (/18)(100)\,9^2 = 2430 \ \frac{ton\,m}{rad}$$

$$I_0 = m\,\frac{b^2+d^2}{12} = \frac{/5\,(9\times 6)}{9{,}81}\left[\frac{9^2+6^2}{12}\right] = 26{,}84 \ \frac{ton\,sec^2}{m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_0}} = \sqrt{\frac{2430}{26{,}84}} = 9{,}52 \ \text{rad/sec}$$

پاسخ ارتعاش آزاد سیستم یکدرجه آزادی با میرایی

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

تقسیم بر m

$$\boxed{\ddot{u} + 2\xi\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = 0}$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad , \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{cr}}$$

ضریب میرایی بحرانی $\boxed{C_{critical}} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \dfrac{2k}{\omega_n}$

جهت حل مع دیفرانسیل $u = e^{\lambda t} \longrightarrow (m\lambda^2 + c\lambda + k)e^{\lambda t} = 0$

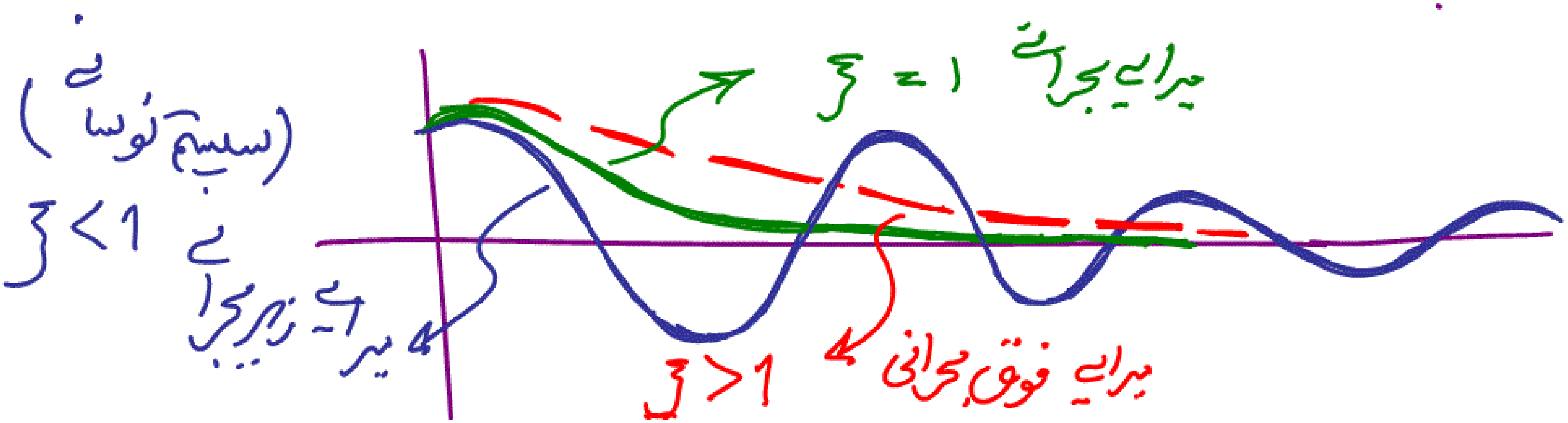
$$\Rightarrow m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

با توجه به عبارت زیر رادیکال چند حالت رخ می دهد :

$$\text{با به عبارتی :}\quad \begin{cases} c^2 - 4mk > 0 \\ c^2 - 4mk = 0 \\ c^2 - 4mk < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C > C_{cr} \text{ یا } \zeta > 1 \rightarrow \text{over damped} & \text{میرایی فوق بحرانی} \\ C = C_{cr} \text{ یا } \zeta = 1 \rightarrow \text{critically damped} & \text{میرایی بحرانی} \\ C < C_{cr} \text{ یا } \zeta < 1 \rightarrow \text{under damped} & \text{میرایی زیر بحرانی} \end{cases}$$



در حالت بحرانی :

$$c^2 - 4mk = 0 \rightsquigarrow \zeta = 1$$

$$c = 2\sqrt{mk}$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_n$$

یک ریشه مضاعف دارد

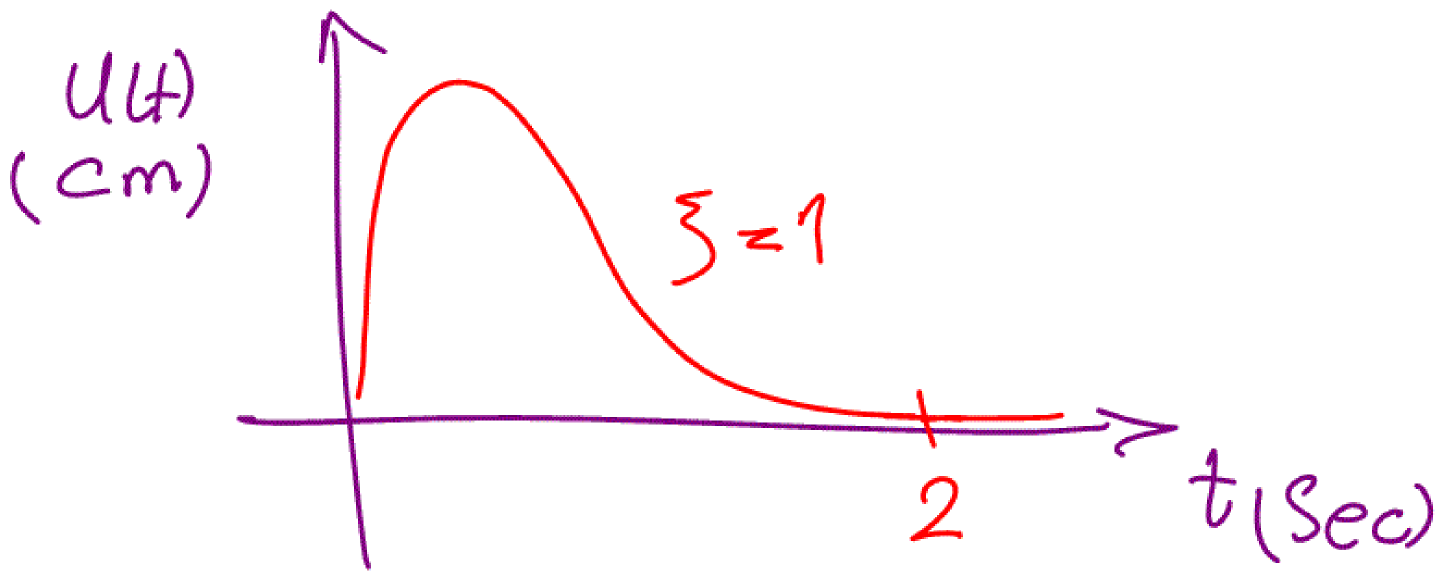
$$\lambda = \frac{-c}{2m}$$

جواب عمومی بصورت : $\boxed{u(t) = (A+Bt)\,e^{-\omega_n t}}$

و با اعمال شرایط اولیه

$$u(t) = \left[u_0 + (\dot{u}_0 + \omega u_0)\,t\right] e^{-\omega_n t}$$

بسیاری از وسایل اندازه گیری و ادوات الکتریکی بر اساس میرایی بحرانی ساخته شده اند تا از فراجهش و نوسان آنها جلوگیری شود



درحالت زیربحرانی

$c^2-4mk<0$ و $(\xi<1)$

$$u = Ae^{\lambda t} \longrightarrow (m\lambda^2 + c\lambda + k)e^{\lambda t} = 0$$

$$m\lambda^r + c\lambda + k = 0$$

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$u = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow$$

$$c^2-4mk<0 \Rightarrow c^2<4mk$$

$$\sqrt{c^2-4mk} = i\sqrt{4mk-c^2} \quad , \; i=\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{4mk-c^2} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2} =$$

$$= 2m\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{c^2}{4mk}}$$

(باتوجه به $C_{cr}=2\sqrt{mk}$) $= 2m\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}$

$$=2m\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A_1 e^{+i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t} + A_2 e^{-i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A_1 e^{i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t} + A_2 e^{-i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t}\right]$$

و داریم

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t}\Big\{A_1\left(\cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + i \sin \omega \sqrt{1-\zeta^2}\, t\right)$$

$$+ A_2\left(\cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t - i \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t\right)\Big\}$$

$$= e^{-\zeta \omega_n t}\left\{(A_1 + A_2) \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + (A_1 - A_2)\, i \sin \omega \sqrt{1-\zeta^2}\, t\right\}$$

(A_1 و A_2 مزدوج‌های موهومی هستند
Complex conjugates)

$$A_1 = a - ib$$

$$A_2 = a + ib$$

$$(A_1 + A_2 = 2a) \quad ((A_1 - A_2)i = 2b)$$

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta \omega t}\left\{ A_1 \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + A_2 \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t \right\}}$$

تعريف وتسميم :

$$\boxed{\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

فرکانس میرا

و

$$\boxed{T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

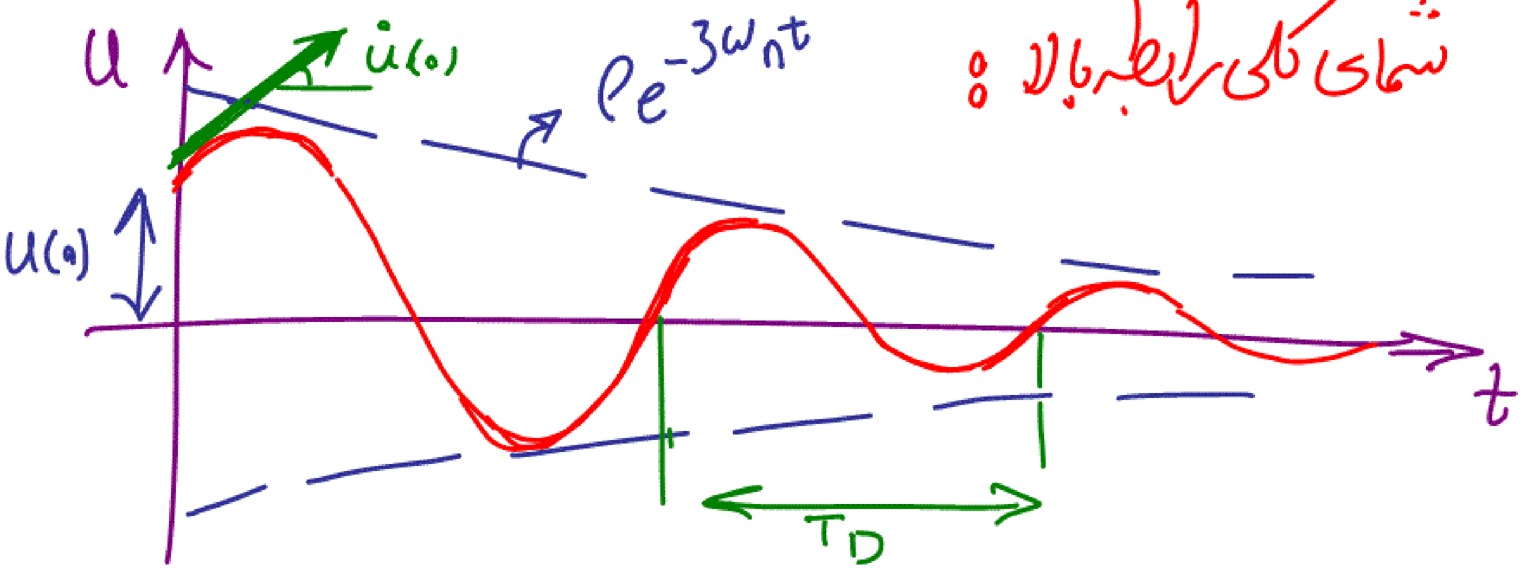
$\Downarrow$

$$\boxed{u(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{A_1\cos\omega_D t + A_2\sin\omega_D t\right\}}$$

A_1 و A_2 را با اعمال شرایط اولیه بدست می‌آورند

$$\boxed{u(t) = e^{-\xi \omega_n t}\left[u(0) \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \xi \omega_n u(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]}$$

شمای کلی رابطه بالا :

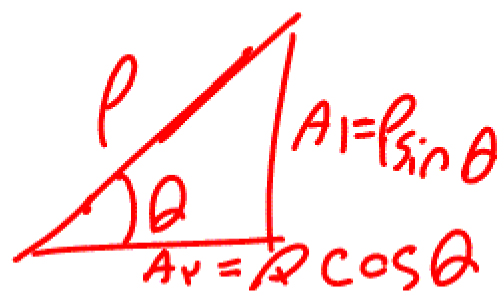


در حالت واقعی

$$u(t) = \rho e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_D t + \theta)$$

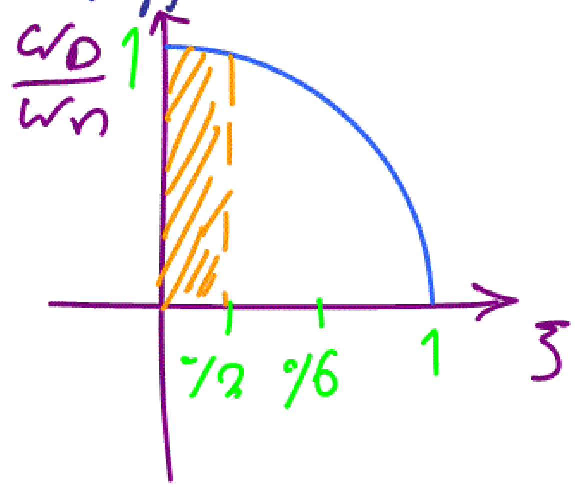
$$\begin{cases} \theta = tg^{-1} \dfrac{A_1}{A_2} = tg^{-1} \dfrac{u(0)\, \omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{\dot{u}(0) + \xi \omega_n u(0)} \\ \rho = \sqrt{(u(0))^2 + \left(\dfrac{\dot{u}(0) + \xi \omega_n u(0)}{\omega_D} \right)^2} \end{cases}$$

$$\sin(A_1 + A_2) = \sin A_1 \cos A_2 + \cos A_1 \sin A_2$$



رابطه بین $\frac{\omega_D}{\omega_n}$ و ξ توسط دایره‌ای به شعاع واحد است

$$\boxed{\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)^2+\xi^2=1}$$

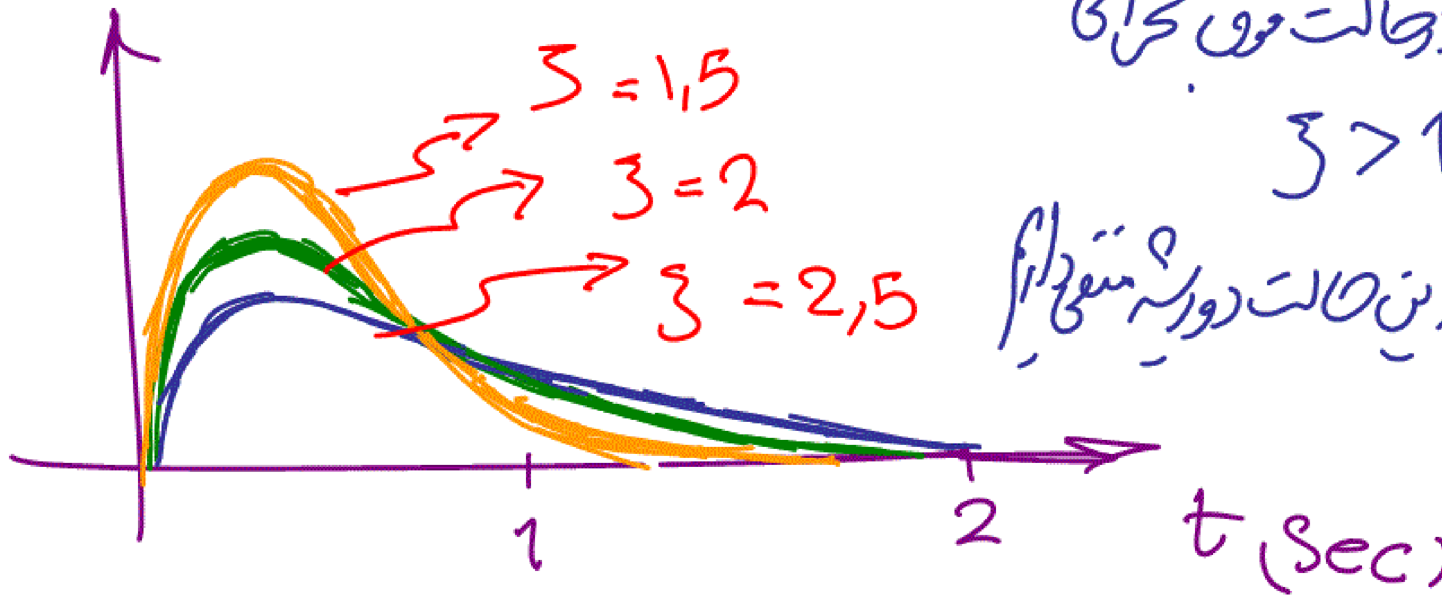


محدوده میرایی بیشتر سازه‌ها { $T_D \approx T_n$

در حالت فوق بحرانی

$\xi > 1$

داریم حالت دو ریشه منفی داریم



برای مقادیر بزرگتر ξ دامنه جهش اولیه کوچکتر است

همچنین حرکت بصورت زیر خواهد بود:

$$u(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\sinh\omega_D t+B\cosh\omega_D t\right)$$

A و B با شرایط اولیه تعیین می‌شوند