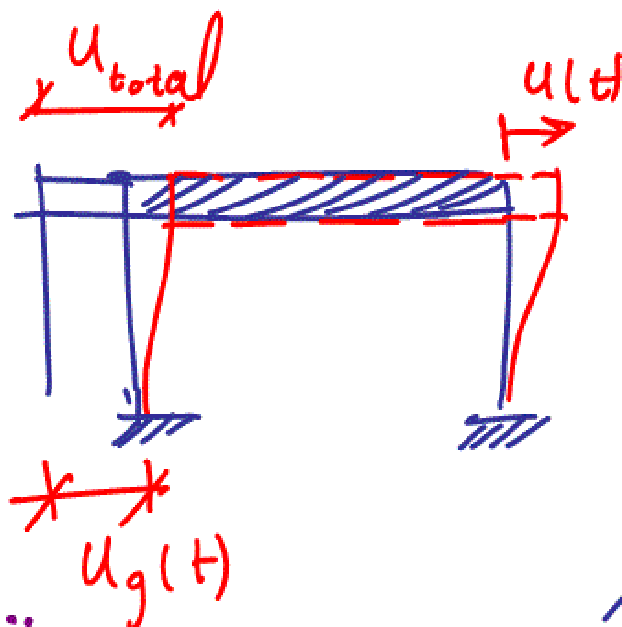
تحریک تکیه‌گاهی   هفته سوم

مثال



$$u_{total}(t) = u(t) + u_g(t)$$

$$f_I(t) = m\ddot{u}_{total}(t) = m\ddot{u}(t) + m\ddot{u}_g(t)$$

$$f_S(t) = k\,u(t)$$

$$f_D(t) = c\,\dot{u}(t)$$

میرایی و سختی با حرکت نسبی کار دارند نه با حرکت کلی اما نیروی اینرسی با شتاب وارد شده

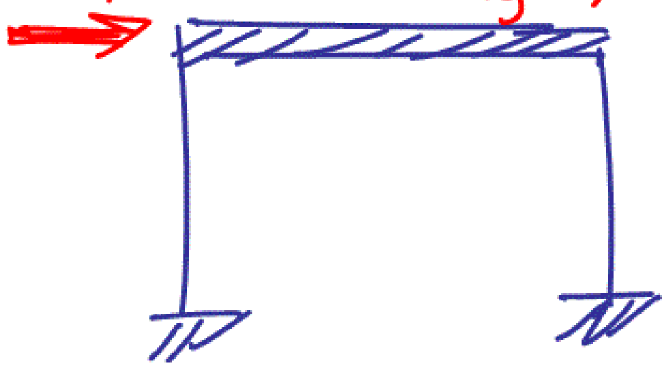
به جسم سروکار دارد که حاصل حرکت کلی است:

$$\boxed{m\ddot{u}(t)+k\,u(t)+c\,\dot{u}(t) = \underbrace{-m\ddot{u}_g(t)}_{P(t)}}$$

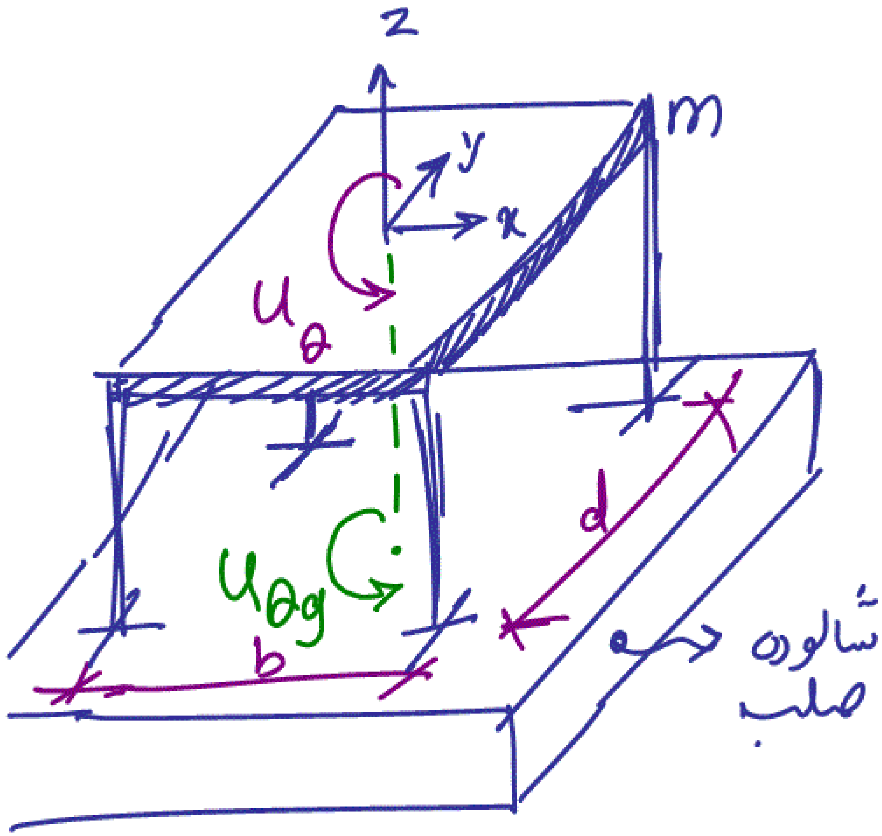
با توجه به معادله نویسی انجام شده سازه فوق که تحت تحریک پایه قرار گرفته است

می‌تواند معادل سازه زیر باشد

$$P(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$



مثال : در سازه روبرو
مقطع ستونها مستطیل بوده
و ممان اینرسی آنها حول محورهای x
و y به ترتیب I_x و I_y است
اگر این سیستم تحت دوران
تکیه گاهی $u_{g\theta}(t)$ حول محور قائم
باشد معادله حرکت را تعیین کنید؟



$$I_0 = \frac{m(b^2+d^2)}{12}$$

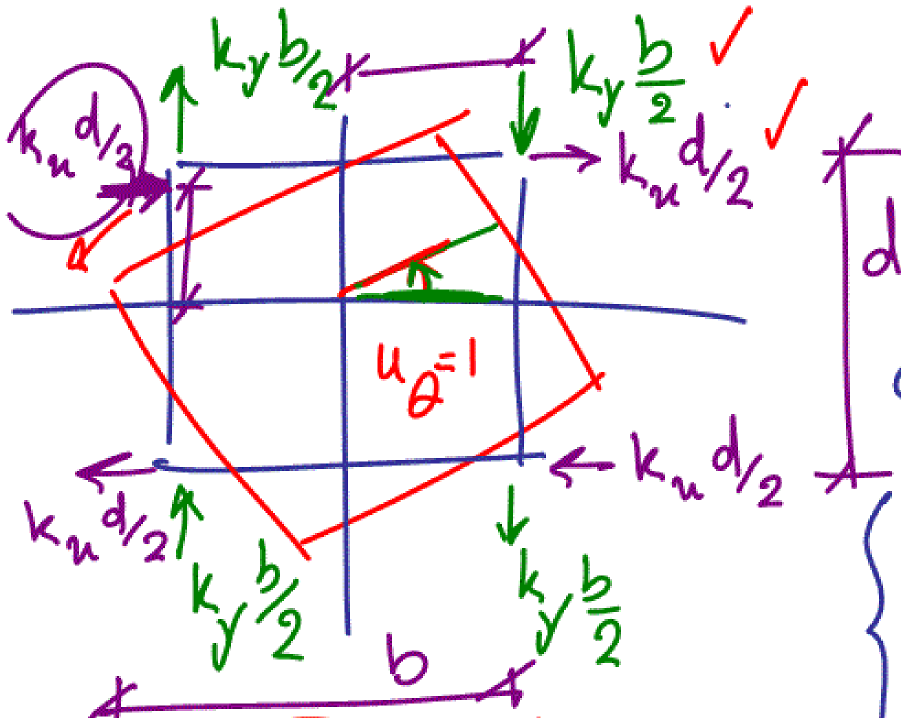
$$f_I = I_0 \left(\ddot{u}_\theta(t)\right)_{total}$$

$$\left(u_\theta(t)\right)_{total} = u_{g\theta}(t) + u_\theta(t)$$

$$f_s = k_\theta u_\theta$$

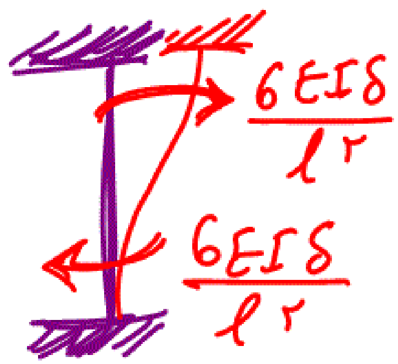
سختی پیچشی

نیروی سختی دورانی مرتبط با چرخش
زاویه‌ای نسبی است



برای تعیین k_θ دوران واحد $\theta = 1$ اعمال می‌شود و نیروی مقاوم هر ستون تعیین می‌شود. برای ستون دوانتها گیردار

$$\begin{cases} k_x = \dfrac{12EI_x}{h^3} \\[2ex] k_y = \dfrac{12EI_y}{h^3} \end{cases}$$

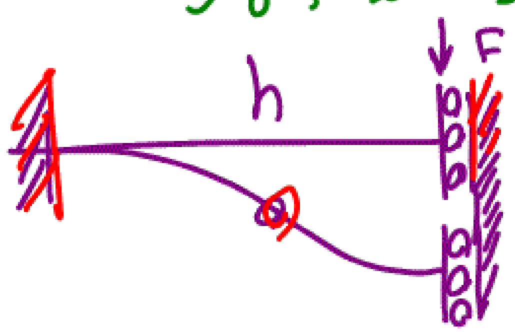


$$m = \frac{6EI(\delta=1)}{l^2} \rightarrow P = \frac{12EI(\delta=1)}{l^3}$$

حول محور وسط $k_\theta = 4\left(k_x \frac{d}{2}\frac{d}{2}\right) + 4\left(k_y \frac{b}{2}\frac{b}{2}\right)$

$$I_\theta \ddot{u}_\theta + \left(k_x d^2 + k_y b^2\right) u_\theta = -I_0 \ddot{u}_{g\theta}$$

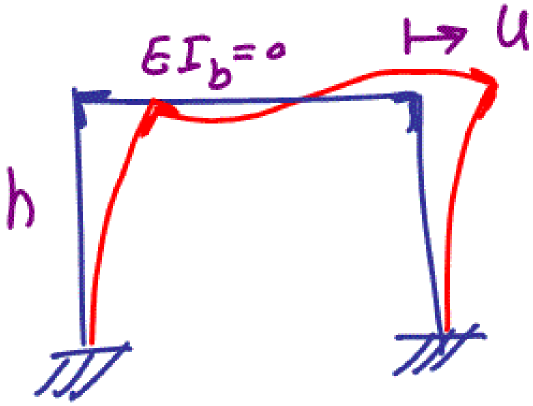
سختی این سازه را به روش دیگر هم می‌توان استدلال کرد



$$\boxed{\delta = 2 \times \frac{F(h/2)^3}{3EI} = \frac{Fh^3}{12EI}}$$

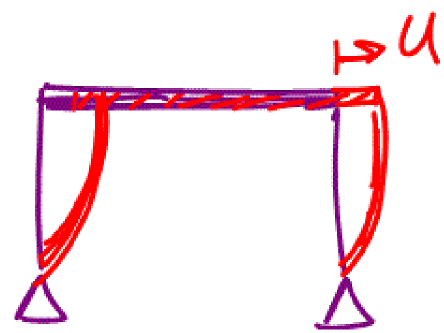
$$\boxed{k = \frac{12EI}{h^3}}$$

و در مورد شکل زیر که الگوی جابجایی آن رسم شده است؟

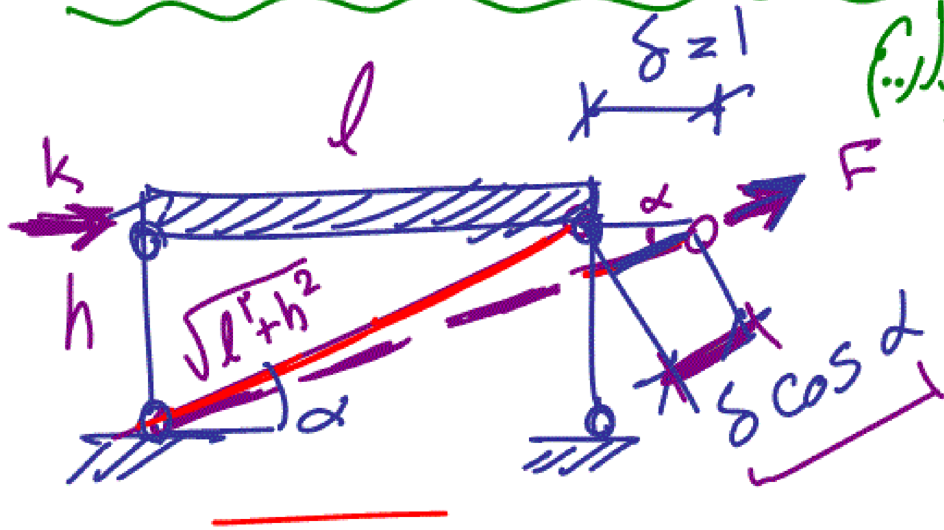


$$\boxed{k = \sum_{\text{Columns}} \frac{3EI}{h^3} = \frac{6EI}{h^3}}$$

یا اینکه بگوییم
اینطور جابجا شده



و در مورد قاب چهاربندی شکل زیر داریم :

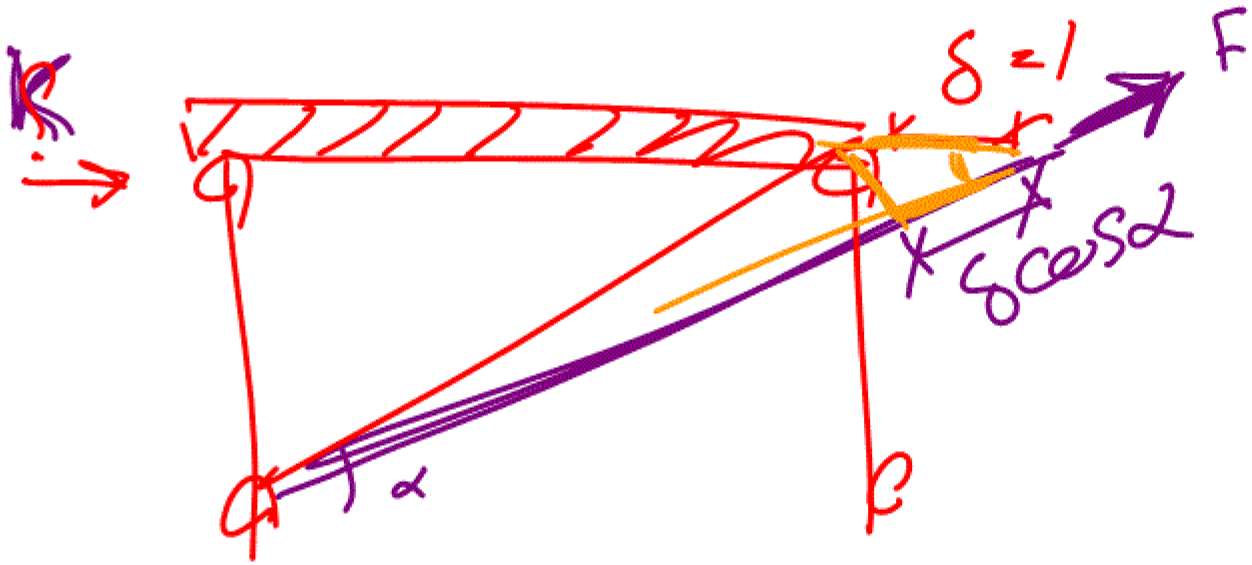


$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+h^2}}}$$

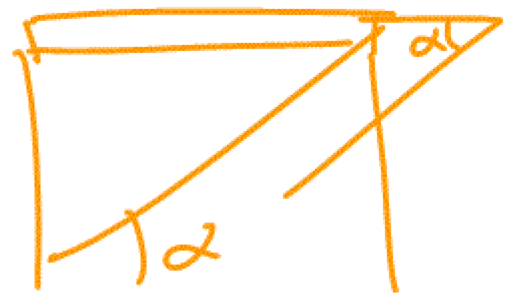
$$(k=F\cos\alpha)\ \text{و}\ (\delta=1)$$

$$\delta=\frac{P\ell}{EA}\quad \leftarrow \text{چهاربند}\quad \boxed{\delta\cos\alpha}=\frac{F\sqrt{\ell^2+h^2}}{EA}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{F=\frac{EA}{\sqrt{\ell^2+h^2}}\cos\alpha}\quad\Rightarrow$$



$$k = F\cos\alpha$$

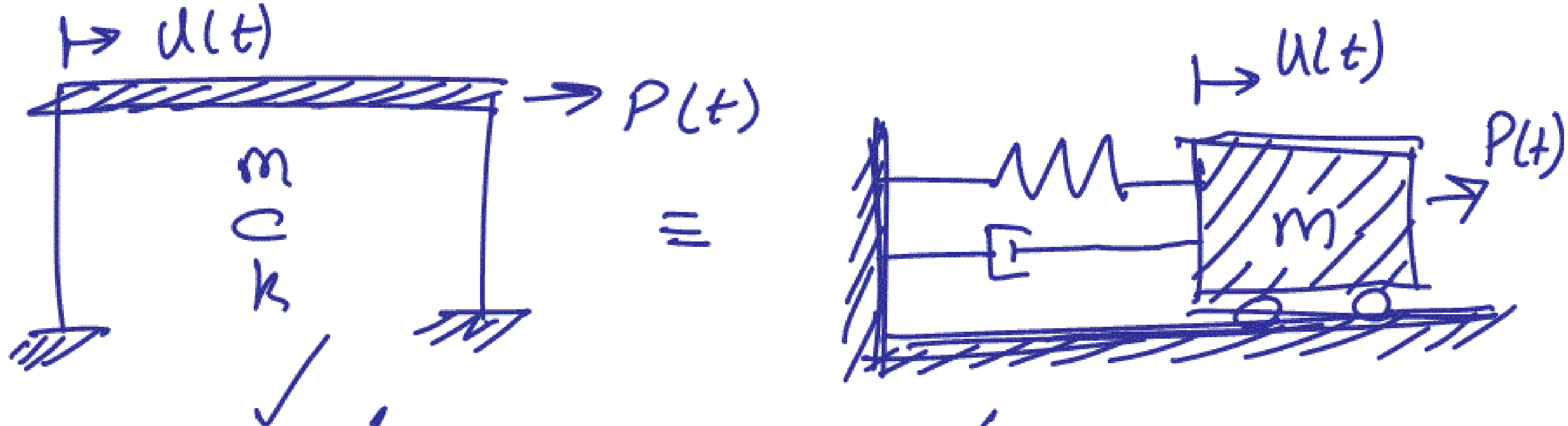


$$\boxed{k = \frac{EA}{\sqrt{l^2+h^2}} \cos^2\alpha} = \boxed{\frac{EA\,l^2}{(l^2+h^2)^{3/2}}}$$

تمرین : 3 مورد مسأله از نوشتن معادلات حرکت سازه‌های یک درجه آزاد

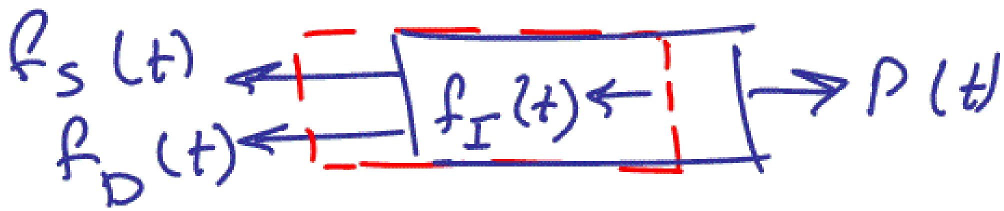
سازه‌های یک درجه آزاد (SDOF)

بسیاری از سیستمهای سازه‌ای را می‌توان جهت تحلیل دینامیکی بصورت یک درجه آزاد مدل نمود. ساختمانهای یک طبقه منظم و منابع مرتفع آب از این قبیل هستند.
علاوه اینکه حل مسائل چند درجه آزاد نیز اساساً بر سازه یک درجه آزاد استوار است. بنابراین دینامیک سازه‌های یک درجه آزاد از اهمیت خاصی برخوردار است.
در شکل دو نمونه سازه یک درجه آزاد را می‌بینیم؛



در مدل ساختمانی بالا کل جرم در تراز سقف متمرکز فرض شده است و از جرم ستونها صرف نظر شده، همچنین میرایی و سختی سازه هر دو در ستونهای سازه متمرکز فرض می‌شود.

معادله حرکت سازه یک درجه آزاد:



$$\boxed{f_I(t)+f_s(t)+f_D(t)=P(t)}$$

$$m\ddot{u}(t) \qquad k\,u(t) \qquad c\dot{u}(t)$$

$$\boxed{m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=P(t)}$$

معادله بالا که اصطلاحاً آن را معادله حاکم بر حرکت دستگاه یک درجه آزاد خطی با میرایی

شرح می‌شود از لحاظ ریاضی یک معادله دیفرانسیل درجه اول و مرتبه دوم با ضرایب ثابت و طرف ثانی است و راه حل و جواب آن بستگی به شکل $P(t)$ دارد

در ادامه حالات مختلف $P(t)$ ، انواع بارگذاری دینامیکی و جواب معادله دیفرانسیل یعنی $u(t)$ که در واقع پاسخ سازه به بار دینامیکی محسوب می‌شود را بررسی می‌کنیم.

پاسخ ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزادی نامیرا

$$\boxed{m\ddot{u}(t) + k\,u(t) = 0}$$

این پاسخ زمانی امکان پذیر است که تغییر مکان یا سرعت اولیه غیر صفر ایجاد کنیم

جواب عمومی معادله دیفرانسیل بدون طرف ثانی و با ضرایب ثابت ←

$$\boxed{u = A e^{\lambda t}}$$

$$\boxed{(m\lambda^2 + k)\,e^{\lambda t} = 0}$$

جمله نمایی نمی تواند صفر باشد پس :

$$m\lambda^2 + k = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k/m}$$

k کمیتی مثبت و m هم مثبت است پس k/m مثبت بوده و بصورت قراردادی

آنرا با ω^2 نشان می‌دهیم.

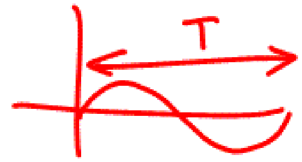
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \left(\omega_n = \sqrt{k/m}\right)$$ فرکانس طبیعی سازه

رادیان بر ثانیه

سرعت زاویه‌ای

* زمان تناوب یا پریود سازه $\Leftarrow$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \text{(ثانیه در دور)}$$



فرکانس زاویه‌ای $\Leftarrow$

$$f = \frac{1}{T_n} \quad \text{(Hz دور در ثانیه)}$$

cps

$f \rightarrow \nu$

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow u(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} \pm A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$u(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}$$

با توجه به اینکه

$$\left(\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) , \left(\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)$$

و با یه عبارتی :

$$\left(e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t\right)$$

داریم :

$$u(t) = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t$$

$$\dot{u}(t) = A\omega_n\cos\omega_n t - B\omega_n\sin\omega_n t$$

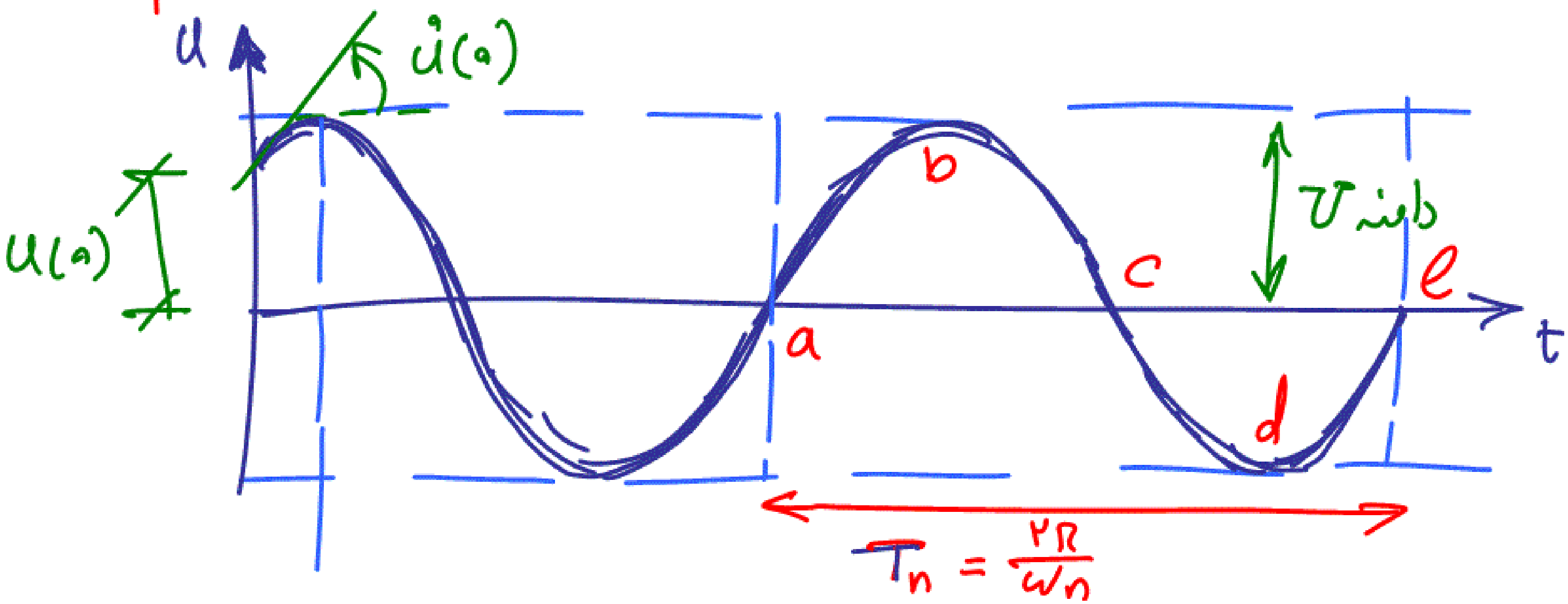
($t=0$ جابجایی در لحظه) $u(0) = B$

(" " در سرعت) $\dot{u}(0) = A\omega_n \Rightarrow \left(A = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \right)$)

ارتعاش آزاد

پاسخ سازه (SDOF)

$$\boxed{u(t) = u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega}\sin\omega_n t}$$



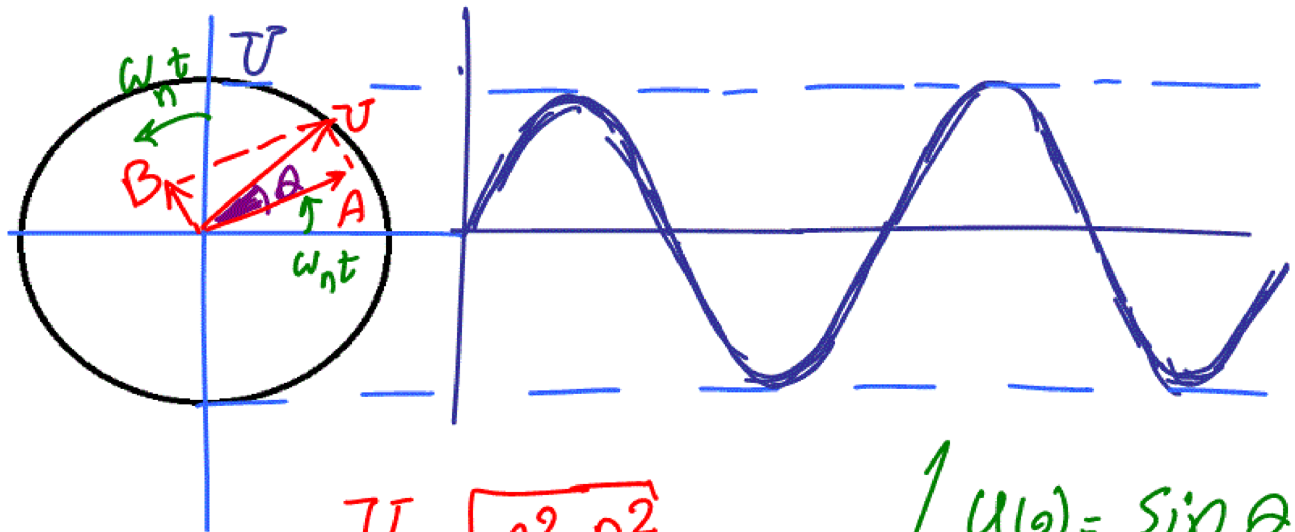
$$\left([a] \to [b] \to [c] \to [d] \to [e] \right)$$

ارتعاش آزاد سیستم در یک دوره تناوب

دامنه حرکت $\quad U = \sqrt{u(0)^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right)^2}$

تابع حرکت را می‌توان فقط با یک تابع Sin هم نشان داد

$$u(t) = U \sin(\omega_n t + \theta)$$



$$U=\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$u(0)= \sin\theta$$

$$\dot{u}(0)=U\omega_n\cos\theta$$

با جایگذاری در رابطه اصلی داریم :

$$U = \sqrt{u_{(0)}^2+\left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{u(0)\omega}{\dot{u}(0)}\right)$$