بسم الله الرحمن الرحیم / هفته دوم /

روش های مدل سازی :

1 - مدل جرم متمرکز :

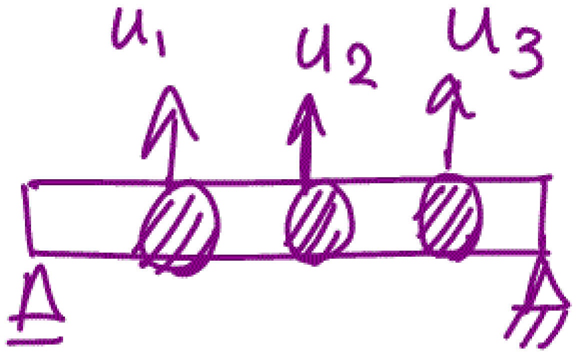
می توان خصوصیات سازه را که در تمام پیکره آن گسترده است

در نقطه یا نقاط خاصی از سازه متمرکز کرد و معادلات حاکم

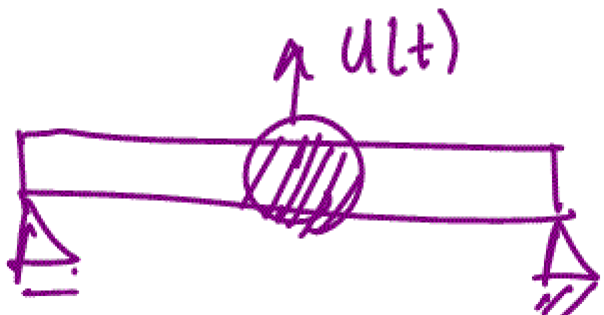
بر حرکت و تغییر شکل سازه را در نقاط محدودی بیان نمود و حل کرد

به این عمل مجزا سازی Discritization هم گفته می شود

مجزاسازی حل مسأله را ساده‌تر می‌کند و اساساً بسیاری از
مسائل را بدون مجزاسازی نمی‌توان حل کرد.
محل، تعداد و نقاط مجزا بتگی به شکل هندسی سازه، توزیع
عناصر دارای سختی، میرایی و جرم در سازه، نحوه بارگذاری
و نهایتاً دقت مورد نظر در حل مسأله دارد.



متمرکز شده در چند نقطه
با آزادی تغییر مکان $u(t)$



متمرکز شده در یک نقطه

بی نهایت ذره جرمی با آزادی
تغییر مکان

2) روش تغییر مکان‌های تعمیم یافته

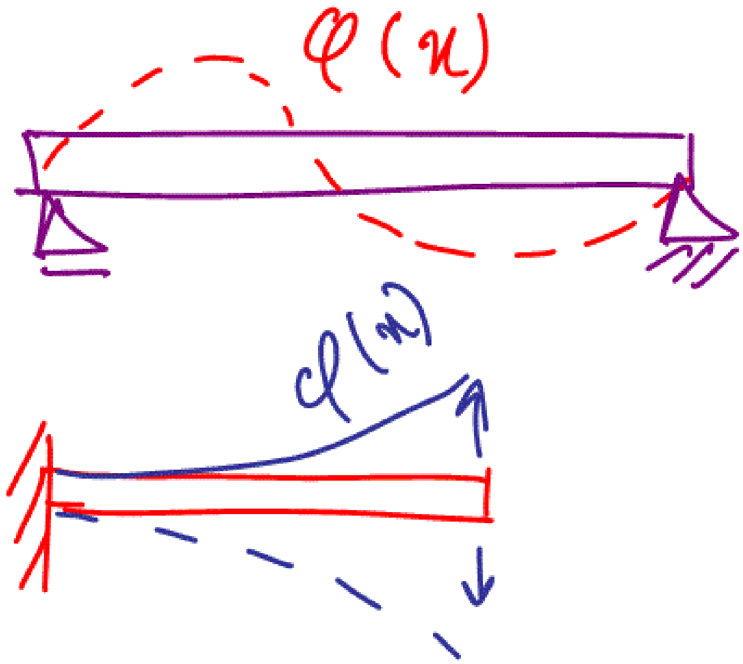
با فرض آنکه تغییر شکل سیستم از الگوی خاصی تبعیت کند

مسأله را می‌توان با تقریب بهتری در مقایسه با روش قبل حل کرد

در این روش تغییر مکان با تابع $\varphi(x)$ تعریف می‌شود

در سازه‌هایی که تغییر مکان آن ساده و مشخص‌تر است

این روش کارایی بهتری دارد.

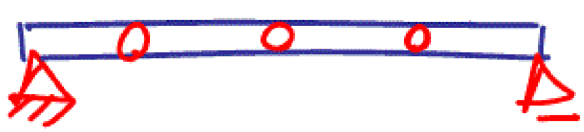


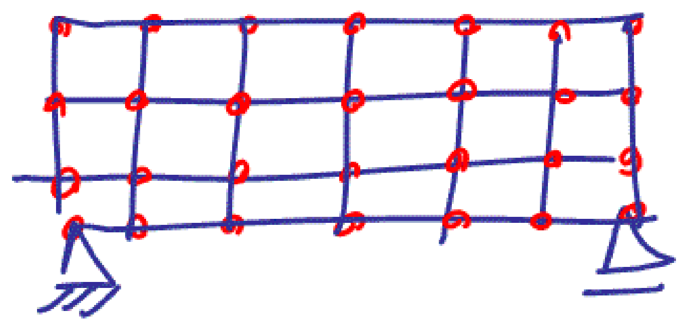
3 > روش اجزاء محدود

در سازه های قابی طول اعضا و در سازه های صفحه ای و پوسته ای

پیکره سازه معمولاً بطور فرضی به تعدادی اجزاء محدود تقسیم می‌شود

در سازه‌های صفحه‌ای اجزاء با شکل چندضلعی که گوشه‌های آنها گره نام دارد شناخته می‌شوند و در سازه‌های حجیم و توده‌ای از اجزاء چندوجهی استفاده می‌شود این روش هم در واقع نوعی مجزاسازی است





در سازه میله‌ای   Finite Element

F.E. در سازه صفحه‌ای Δ

4> مدل جرم پیوسته

در این روش هیچ عضو متمرکز کننده‌ای برای جرم، سختی و میرایی
در نظر نمی‌گیریم و خصوصیات سازه در جای خود اعمال می‌شود
در عالم واقع سازه‌ها از مدل جرم پیوسته تبعیت می‌کند ولی
فرضیات قبلی در جهت ساده‌سازی تحلیل‌ها صورت گرفت

درجات آزادی

بدنبال مدل کردن سازه توسط تعدادی نقاط جرمی و یا گره ها و عناصر رابط بین گره ها موضوع تعداد مجهولاتی که برای حل مسأله نیاز داریم مطرح می شود، واضح است که هر چه تعداد مجهولات کمتر باشد حل آن راحت تر است بنابراین موضوع

تعداد حداقل مجهولات مستقل ممکن که باید به تعداد آن
معادله تشکیل شود اهمیت خاصی دارد.

می دانیم که هر جسم صلب در فضا دارای 3 مؤلفه مستقل جابجایی
و سه مؤلفه مستقل چرخشی است و همین جسم در صفحه 2 مؤلفه
جابجایی و 1 مؤلفه چرخشی دارد.

در مورد نقطه مادی چون بعد برای آن فرض نمی شود مؤلفه
چرخشی وجود ندارد و بنابراین در فضا 3 مؤلفه جابجایی و

درصفحه 2 مؤلفه مستقل حرکتی دارد به همین ترکیب اگر جرم

تخصیص یافته به گرهی از سازه بصورت نقطه‌ای فرض شود

تنها مؤلفه جابجایی دارد ولی اگر بعداً آن ذکر شود مؤلفه‌های چرخشی

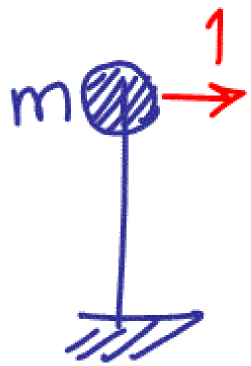
هم دخیل خواهند بود که اینرسی دورانی دلیل این امر است

برا ساس آنچه ذکر شد اکنون می‌توان درجات آزادی را تعریف کرد

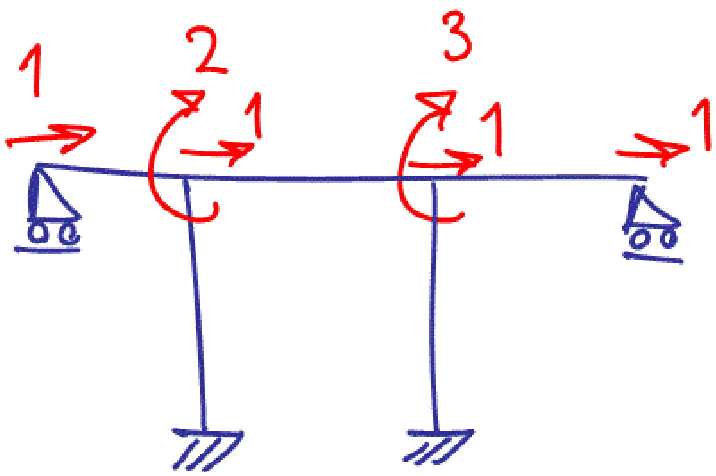
بطور کلی درجات آزادی یک سازه عبارت است از مؤلفه‌های

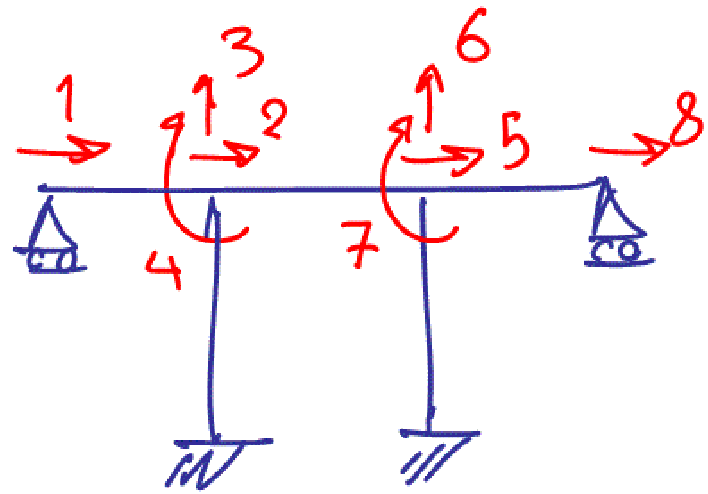
حرکتی مستقل ممکن در گره‌های آن .

به عبارت دیگر تعداد مؤلفه های حرکتی مستقل مراکز مقاومت سازه درجات آزادی آن است



واضح است که هر سازه پایدار تعدادی گره های مقید دارد بنابراین می توان درجات آزادی مقید و غیر مقید تعریف کرد اگرچنانچه همه درجات آزادی سازه ای مقید شود حرکتی در آن رخ نمی دهد

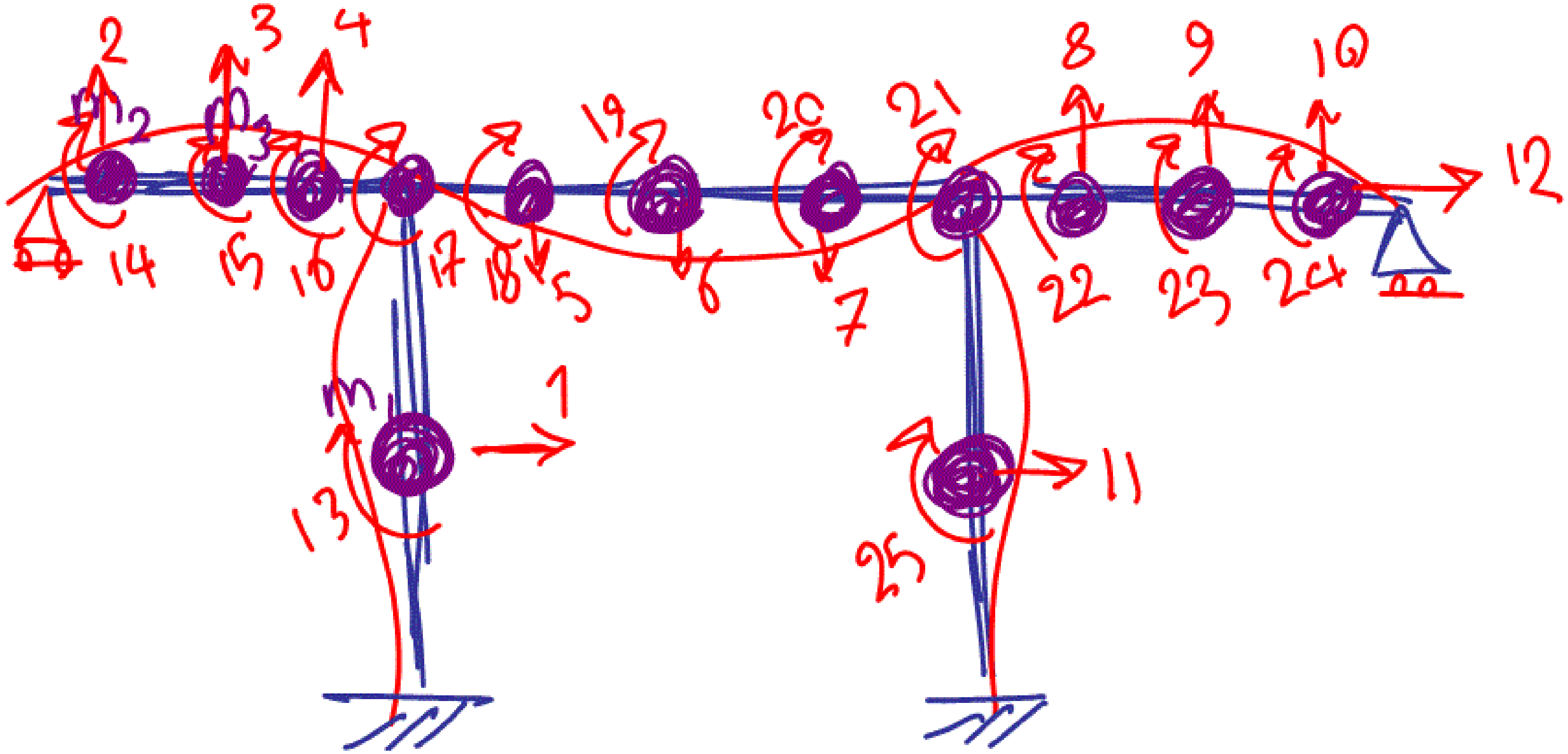




درجات آزادی در یک پل در حالت استاتیکی با صرفنظر کردن از تغییر شکل محوری
و با بی‌نها کردن آن

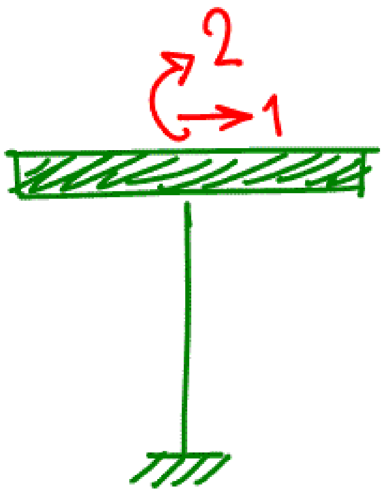
در حالت استاتیکی گره‌های سازه همان نقاط برخورد اعضای سازه

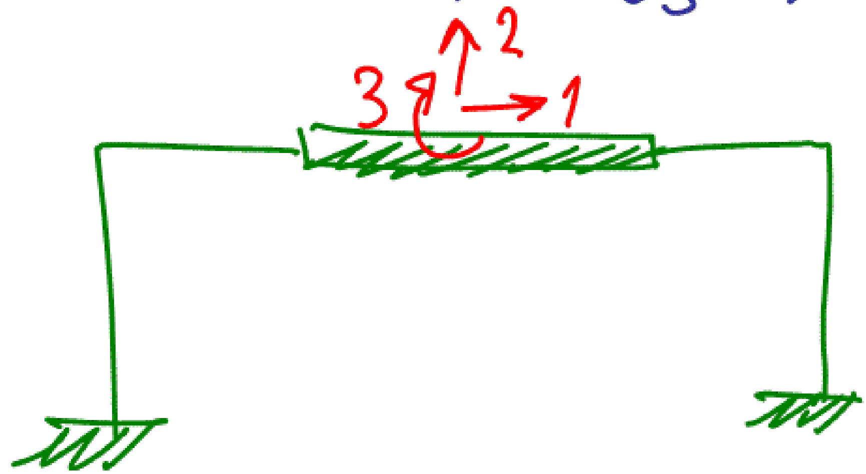
و با انتهای اعضا هستند و برای مدل کردن استاتیکی
سازه فرض کردن سختی گره‌ها کافی است

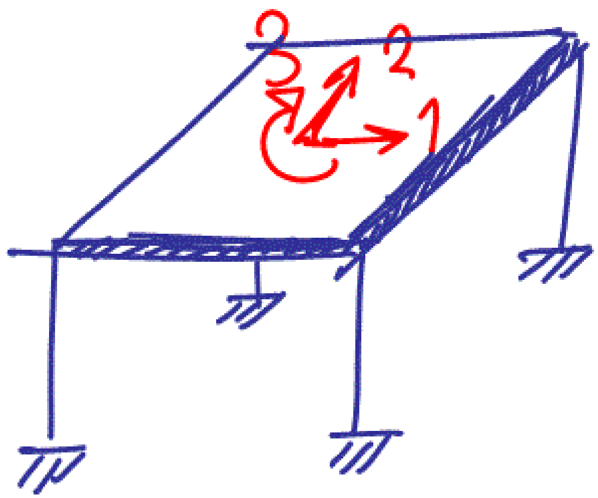


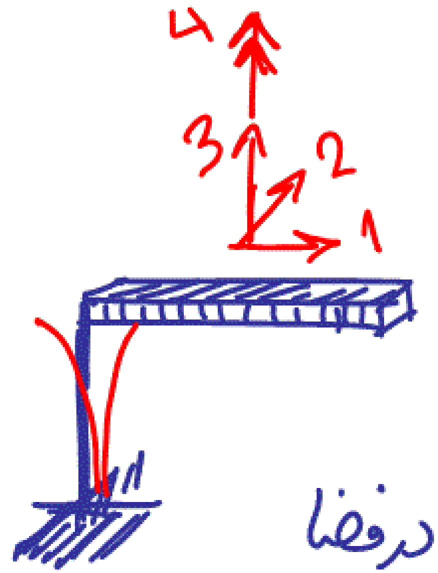
"درجات آزادی غیر مقید سازه پل در حالت دینامیکی با صرفنظر
کردن از تغییر شکل های محوری"

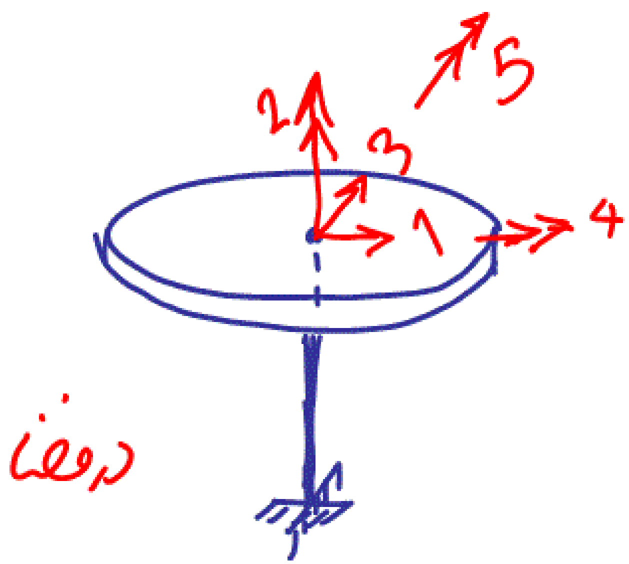
مثالهای دیگر از درجات آزادی :

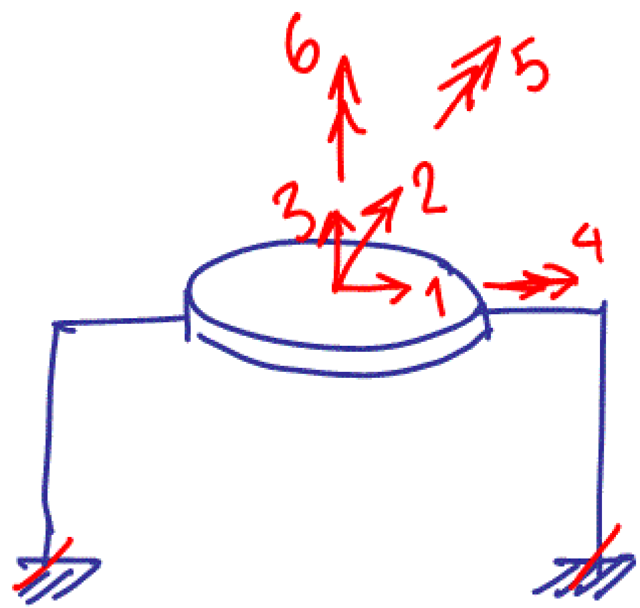


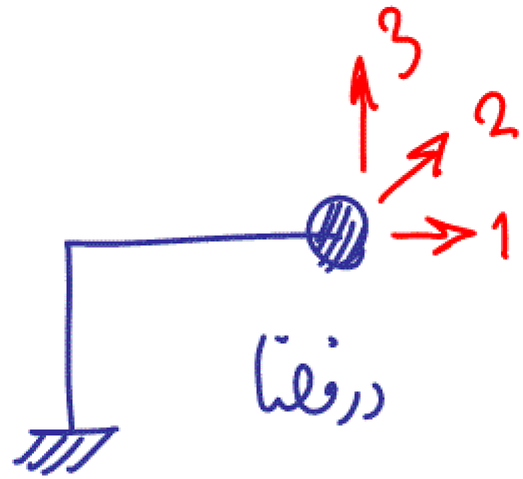


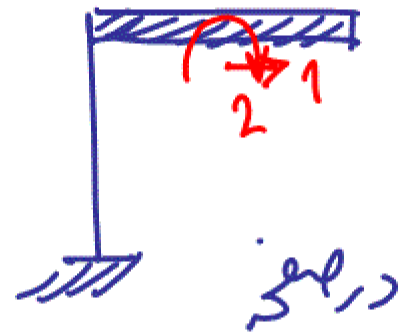

3
2
1

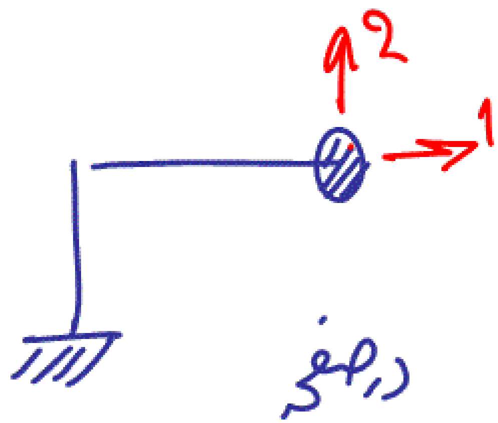

4
3
2
1
درفضا

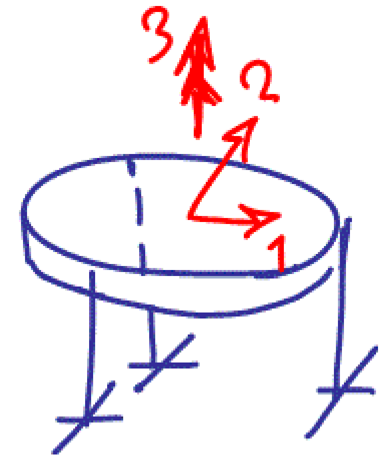

2
5
3
1
4
درفضا

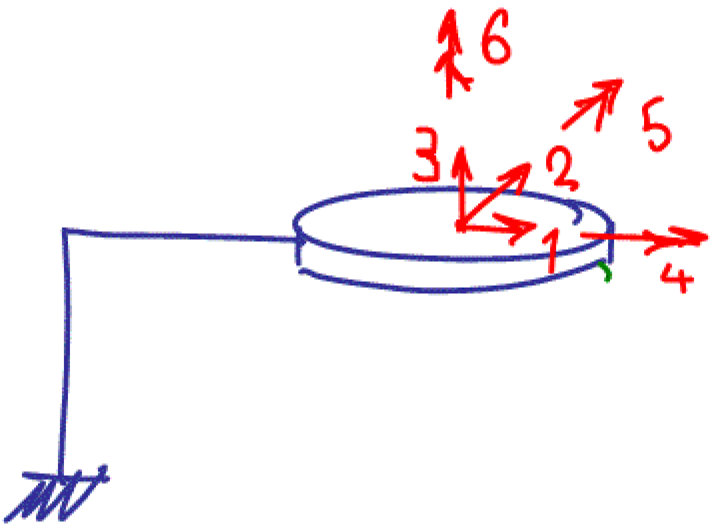

6
5
3
2
4
1

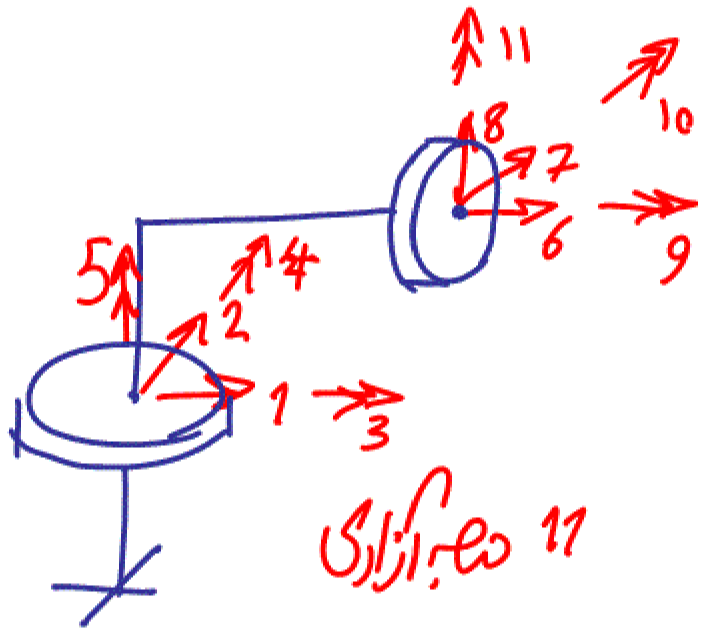

3
2
1
درفضا

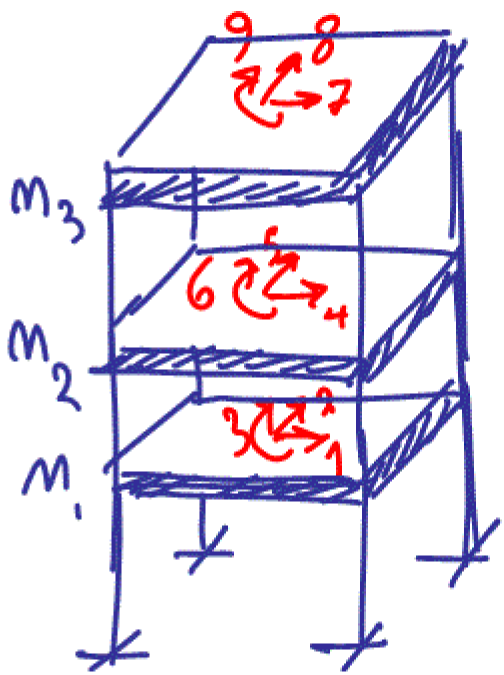

1
2
درصفحه

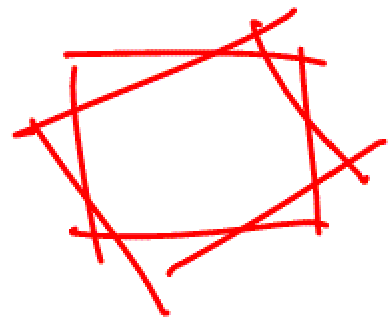

2
1
درصفحه


3
2
1




11 درجه آزادی


M_3
M_2
M_1



درجه آزادی سازه‌ای که از جرم‌های متعدد تشکیل شده است برابر مجموع درجات آزادی گره‌های جرمی آن است.

* باید توجه داشت که درجات آزادی در صورتی مستقل هستند که بتوان در چنین اعمال حرکت در سایر درجات آزادی هر یک را مقید نگه داشت

در نتیجه درجات آزادی دینامیکی را اینطور تعریف می‌کنیم که

"تعداد مختصات مستقل مورد نیاز برای تعیین موقعیت یک جرم مرتعش در هر لحظه از زمان"

فرضیات

در دینامیک سازه‌ها اصل تغییرمکان‌های کوچک (عدم تأثیر تغییرشکلها روی روابط تعادل) ونیز اصل خطی بودن رابطه بین تنش و کرنش (رفتار ارتجاعی سیستم) برقرار است و بنابراین اصل جمع آثار قوا نیز برقرار خواهد بود ولی در مواردی هم تغییراتی در این فرضها خواهیم داشت.

معادلات حرکت

در تحلیل دینامیکی سازه مهمترین گام نوشتن روابط ریاضی حاکم بر حرکت سیستم می باشد که برای این کار 3 روش وجود دارد

1- قانون دوم نیوتن (اصل دالامبر)

2- اصل تغییر مکانهای مجازی (کار مجازی)

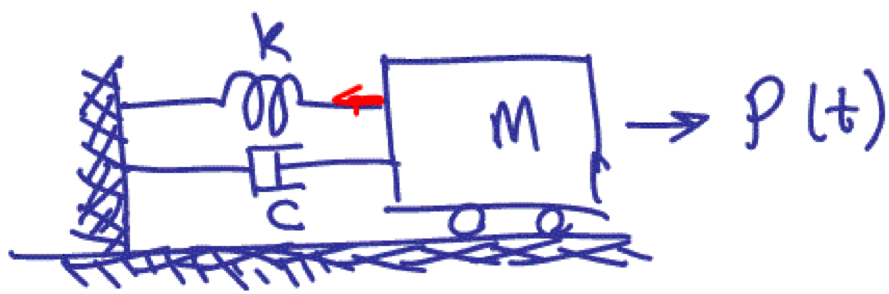
3- اصل هامیلتون (روش انرژی)

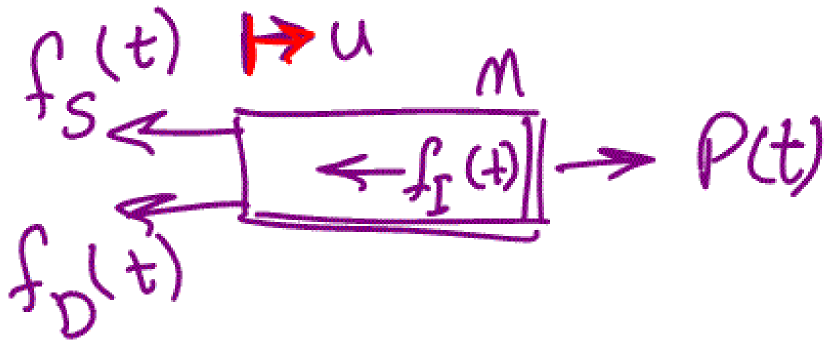
روش اول

تغییرات اندازه حرکت در هر سیستم برابر با نیروهایی که به آن سیستم وارد می شود این روش براساس قانون دوم نیوتن استوار است

$$P(t) = \frac{d}{dt}\left[m\,\dot{u}(t)\right] = \underline{m\,\ddot{u}(t)}$$

اصل دالامبر را روش مستقیم تعادل نیروها هم می نامند





$$f_I(t)+f_D(t)+f_S(t)=P(t)$$

$$\boxed{m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+k\,u(t)=P(t)}$$

معادله تعادل بدست آمده به روش بالا یک معادله دیفرانسیل مرتبه 2
است که با توجه به شرایط سیستم جوابهای مختلفی دارد .

روش دوم

اگر سیستمی در حال تعادل باشد کار نیروهای مجازی صفر خواهد شد.

در این روش جمع جبری تغییر مکانهای مجازی داده شده به سیستم را برای هر یک از نیروها نوشته و معادله تعادل را بدست می‌آوریم

$$P(t)\,du - \left(f_I(t)\,du + f_D(t)\,du + f_S(t)\,du\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = P(t)$$

روش سوم

روش هامیلتون مفصل‌تر روشهای قبل است و در مسائل پیچیده‌تر کاربرد دارد. در این روش با نیروهای وارد بر سازه کاری نداریم و تشکیل معادلات به کمک انرژی حاصل از نیروها انجام خواهد شد.

$$\begin{cases} T = \text{انرژی جنبشی کل سیستم} \rightarrow \frac{1}{2} m \dot{u}(t)^2 \\ V = \text{انرژی پتانسیل کل سیستم} \rightarrow \frac{1}{2} k \, u(t)^2 \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W\,dt = 0$$

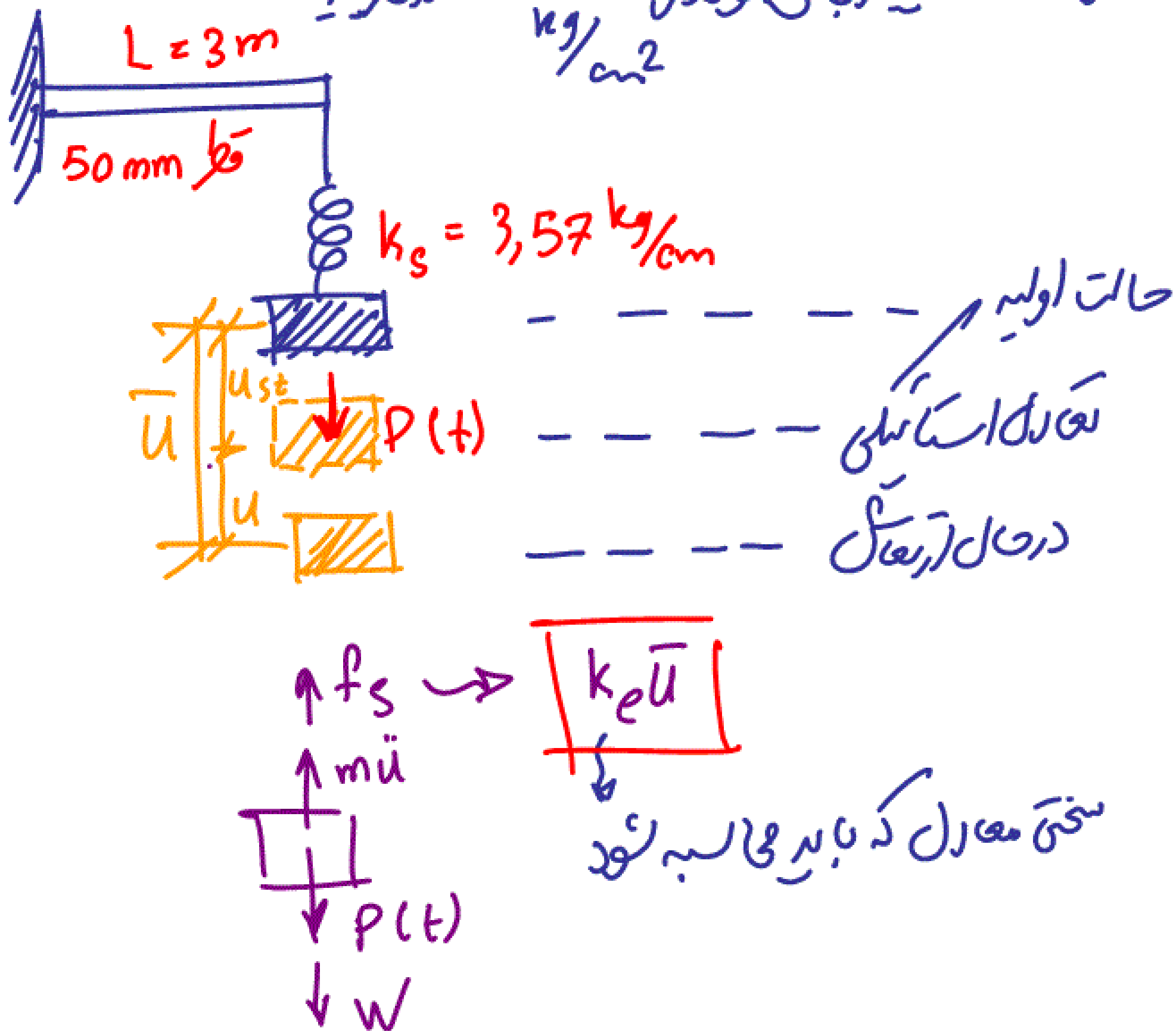
بعد از جایگذاری و انتگرال گیری می رسیم به عبارت

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t)}$$

مثال

معادله حرکت وزنه W را که توسط فنر به یک تیرچه ای فولادی متصل است تعیین نمایید.

از جرم تیر صرف‌نظر کرده و ضریب ارتجاعی فولاد را $2\times10^{6}\ kg/cm^{2}$ در نظر بگیرید.



$$m\ddot{\bar{u}} + k_e \bar{u} = P(t) + W$$

$$m(\cancel{\ddot{u}_{st}} + \ddot{u})$$

$$m\ddot{u} + k_e(u_{st} + u) = P(t) + W$$

$$m\ddot{u} + \cancel{k_e u_{st}} + k_e u = P(t) + \cancel{W}$$

$$\boxed{m\ddot{u} + k_e u = P(t)}$$

(معادله حرکت یک سیستم یک درجه آزاد بدون میرایی)

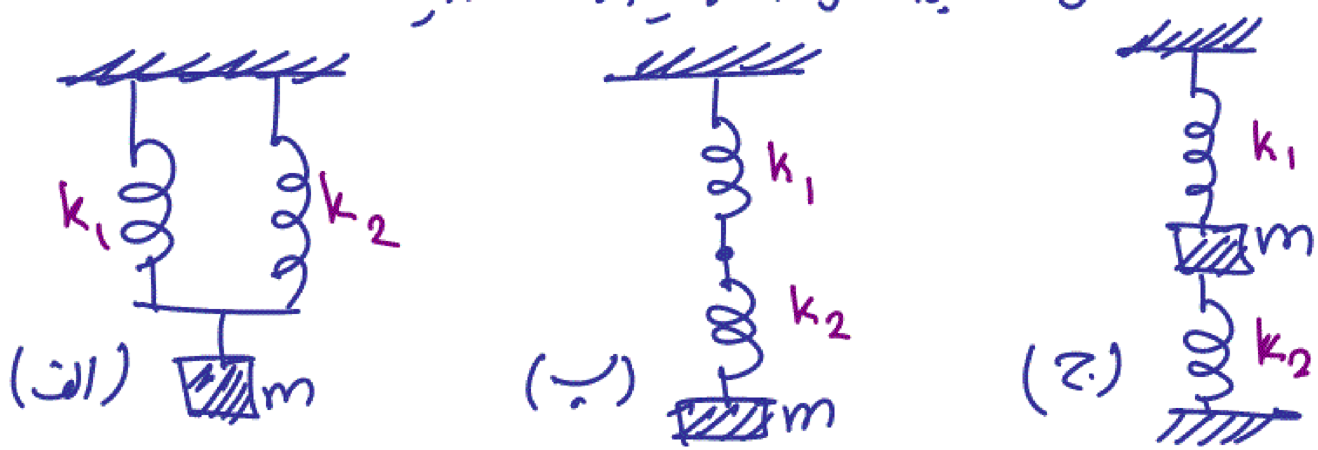
در واقع در این رابطه u از وضعیت تغییر شکل یافته استاتیکی محاسبه می‌شود و تحت تاثیر وزن قرار ندارد

در سیستمهای خطی <u>پاسخ کلی</u> از جمع پاسخ دینامیکی و استاتیکی بدست می‌آید.

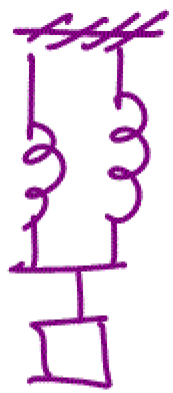
$$k_e = \frac{k_s \cdot k_b}{k_s + k_b}$$

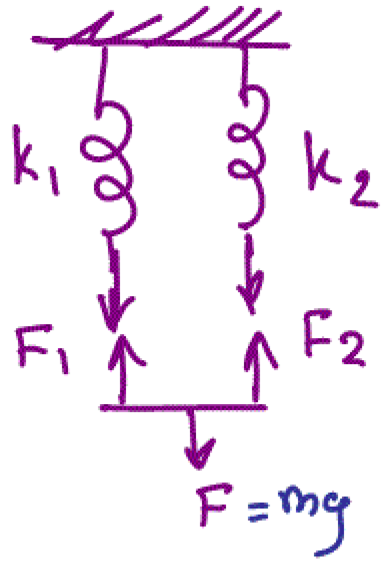
$$\boxed{k_b = \frac{3EI}{l^3}} \qquad \boxed{k_s = 3{,}57}$$

مثال: معادله حرکت جرم m را در حالتهای زیر بدست آورید:



الف)





$$F_1 = k_1 u$$

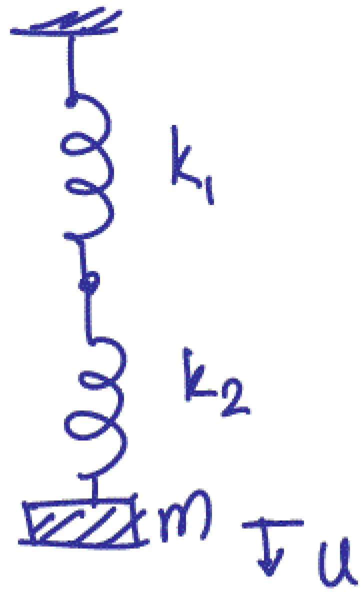
$$F_2 = k_2 u$$

$$F_1 + F_2 = mg$$

$$(\underbrace{k_1 + k_2}_{k_e})u = k_e u$$

$$m\ddot{u} + (\underbrace{k_1 + k_2}_{k_e})u = 0$$

ب)



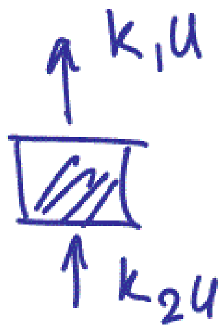
$$F = k_1 u_1 = k_2 u_2$$

$$u = u_1 + u_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

$$u = \frac{F}{k_e}$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$$

$$\boxed{m\ddot{u} + \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) u = 0}$$



$$\boxed{m\ddot{u} + (k_1 + k_2)\,u = 0}$$

(ε.